

# Dualraum eines Vektorraumes

Alexander von Felbert

Mai 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Einleitung</b>	<b>3</b>
1. Motivation und Überblick . . . . .	3
2. Notation und Konventionen . . . . .	3
<b>II. Präliminarien</b>	<b>4</b>
1. Homomorphismenräume . . . . .	4
2. Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	6
<b>III Der Dualraum</b>	<b>11</b>
1. Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	11
2. Duale Basen und Vektoren . . . . .	13
3. Bidualraum . . . . .	17

# I. Einleitung

## 1. Motivation und Überblick

Im Alltagsgebrauch versteht man unter dem Begriff der „Dualität“ oftmals eine „enge Beziehung zwischen zwei Objekten“. Innerhalb der Mathematik existieren verschiedene nicht äquivalente Dualitätsbegriffe z.B. in der Linearen Algebra, der Geometrie, der Matroidtheorie und der Logik. In diesem Skript werden wir die Dualität der Vektorräume studieren und veranschaulichen. Einleitend dazu befassen wir uns in den Präliminarien mit grundlegenden Eigenschaften linearer Abbildungen, Homomorphismen und Darstellungsmatrizen. Allerdings beschränken wir uns dabei auf das für unsere Zwecke Notwendige, weshalb wir Kenntnisse über Vektorräume, Basen, lineare Abbildungen und Matrizen auch voraussetzen.

Im dritten und letzten Kapitel erklären wir, was wir unter einem Dualraum zu verstehen haben. Daneben zeigen wir erste Eigenschaften auf und veranschaulichen die Zusammenhänge mit ausführlich dargelegten Beispielen. Insbesondere der Zusammenhang eines Dualraumes zu Matrizen werden wir beleuchten und hervorheben. Z.B. werden wir die Konstruktion einer dualen Basis in einem Beispiel durchspielen. Abschließend untersuchen wir noch Bidualräume, um festzustellen, dass diese in natürlicher Weise mit dem Ausgangsvektorraum korrespondieren und daher oft mit diesen identifiziert werden.

Es gibt viele Bücher zur „Linearen Algebra“, ein m.E. ausgezeichnetes Exemplar ist [1]. Dort findet man eine fundierte Einführung für die benötigten Grundlagen. Das Vorlesungs-Skript [3] ist ebenfalls ein sehr gut gelungenes Werk, dort werden auch Dualräume in einer ähnlichen Art und Weise vorgestellt. Ein sehr populäres Werk ist das von BEUTELSPACHER verfasste Buch [2] auf das wir auch verweisen werden.

## 2. Notation und Konventionen

Durch  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  seien die natürlichen Zahlen bezeichnet und entsprechend sei  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup 0$ . Für die ersten  $n$  natürlichen Zahlen reservieren wir das Symbol  $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$ . Weiter sei  $K$  stets ein Körper und  $V$  bzw.  $W$  stellen Vektorräume über dem Körper  $K$  dar. Ist  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl, so notieren wir mit  $\dim(V) = n$  die Dimension des  $K$ -Vektorraums, d.h. eine jede Basis von  $V$  besitzt genau  $n$  Basisvektoren. Mit  $K^n$  schreiben wir den  $n$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraum, der mit Hilfe des  $n$ -fachen kartesischen Produktes gebildet wird. Einen  $(n - 1)$ -dimensionalen  $K$ -Untervektorraum eines  $n$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraumes nennen wir Hyperebene. Den Vektorraum der  $(m \times n)$ -Matrizen notieren wir durch  $M_{mn}(K)$  und ist  $A \in M_{mn}(K)$  eine  $(m \times n)$ -Matrix, so bezeichnen wir die Transponierte von  $A$  mit  $A^T \in M_{nm}(K)$ .

## II. Präliminarien

### 1. Homomorphismenräume

In der Linearen Algebra werden neben den Eigenschaften eines  $K$ -Vektorraums  $V$  vor allem die Beziehungen zwischen zwei  $K$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  untersucht. Um feststellen zu können, ob zwei  $K$ -Vektorräume „im wesentlichen gleich“ sind, interessiert man sich insbesondere für strukturerhaltende Abbildungen.

**II.1.1 Definition:** Seien  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume.

1. Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **lineare Abbildung**, wenn die Gleichungen

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \quad (\text{Additivität})$$

$$f(k \cdot v) = kf(v) \quad (\text{Homogenität})$$

für alle  $v, w \in V$  und alle  $k \in K$  erfüllt sind. Lineare Abbildungen bezeichnet man auch oft als **Vektorraum-Homomorphismus** oder kurz als **Homomorphismus**.

2. Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, so nennen wir die Menge

$$\text{Kern}(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \subseteq V$$

den **Kern** von  $f$ . Hingegen bezeichnen wir die Menge

$$\text{Bild}(f) := \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w \} \subseteq W$$

als **Bild** von  $f$ .

Da eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  Strukturinformationen (die Linearität) auf ihr Bild überträgt, ist  $\text{Bild}(f)$  ebenfalls ein  $K$ -Vektorraum.

**II.1.2 Definition:** Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über einem Körper  $K$ . Die Menge

$$\text{Hom}_K(V, W) := \{ f : V \rightarrow W \mid f \text{ ist linear} \}$$

heißt **Homomorphismenraum** von  $V$  nach  $W$  über  $K$ . Anstatt  $\text{Hom}_K(V, W)$  schreiben wir auch  $\text{Hom}(V, W)$ .

Definieren wir auf  $\text{Hom}(V, W)$  geeignete Operationen, so zeigt sich, dass der Raum der Homomorphismen selbst eine Vektorraumstruktur besitzt. Dazu müssen wir eine Vektoraddition und eine Skalarmultiplikation erklären.

Beachten Sie, dass im nächsten Satz das Summensymbol  $+$  in zweifacher Bedeutung vorkommt. Zum Einen wird es für die Homomorphismensumme und zum Anderen für die Summe zweier Körperelemente verwendet. Im Kontext ist jedoch stets klar, was gemeint ist.

**II.1.3 Satz:** Seien  $V$  und  $W$  je ein  $K$ -Vektorraum und  $v \in V$ ,  $k \in K$  sowie  $\psi, \phi \in \text{Hom}_K(V, W)$  Elemente des Homomorphismenraumes. Die Menge der  $K$ -Vektorraum-Homomorphismen  $\text{Hom}_K(V, W)$  zusammen mit der Addition

$$\begin{aligned} + : \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}(V, W) && \text{und dem Skalarprodukt} \\ \cdot : K \times \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}(V, W) \end{aligned}$$

definiert durch

$$(\psi + \phi)(v) := \psi(v) + \phi(v), \tag{II.1}$$

$$(k \cdot \psi)(v) := k\psi(v) \tag{II.2}$$

ist ein  $K$ -Vektorraum.

*Beweis.* Die Summe  $(\psi + \phi)$  zweier Vektorraum-Homomorphismen  $\psi, \phi \in \text{Hom}(V, W)$  ist ebenfalls ein Element aus  $\text{Hom}_K(V, W)$  und somit eine lineare Abbildung. Für alle  $v, w \in V$  und  $k \in K$  sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\psi + \phi)(v + w) &= \psi(v + w) + \phi(v + w) = \psi(v) + \psi(w) + \phi(v) + \phi(w) \\ &= \psi(v) + \phi(v) + \psi(w) + \phi(w) = (\psi + \phi)(v) + (\psi + \phi)(w) \\ (\psi + \phi)(kv) &= \psi(kv) + \phi(kv) = k(\psi(v) + \phi(v)) = k \cdot (\psi + \phi)(v) \end{aligned}$$

erfüllt, d.h.  $(\psi + \phi) \in \text{Hom}_K(V, W)$ . Beachten Sie bei obigen Gleichungen die Eigenschaften des zu Grunde gelegten Körpers, z.B. die Kommutativität.

Beim Skalarprodukt müssen wir zeigen, dass  $k \cdot \psi$  für alle  $\psi \in \text{Hom}_K(V, W)$  wieder ein Homomorphismus und damit eine lineare Abbildung ist. Wir erhalten die in diesem Beweis erklärte Notation aufrecht und definieren weiter  $\lambda \in K$ , dann gelten

$$\begin{aligned} (k \cdot \psi)(v + w) &= k\psi(v + w) = k(\psi(v) + \psi(w)) = k\psi(v) + k\psi(w) = (k \cdot \psi)(v) + (k \cdot \psi)(w) \\ (k \cdot \psi)(\lambda v) &= k\psi(\lambda v) = k\lambda\psi(v) = \lambda(k \cdot \psi)(v), \end{aligned}$$

weshalb auch  $(k \cdot \psi)$  Element von  $\text{Hom}_K(V, W)$ . Das Nullelement der Addition zweier Homomorphismen ist die Nullfunktion  $0(v) := 0$  für alle  $v \in V$  und zu vorgegebenem Homomorphismus  $\psi \in \text{Hom}_K(V, W)$  ist  $((-1) \cdot \psi) : V \rightarrow W$  das additive Inverse, da

$$((-1) \cdot \psi)(v) + \psi(v) = (-1)\psi(v) + \psi(v) = \psi(v) - \psi(v) = 0 \quad (\forall v \in V)$$

gilt. Die Kommutativität der Addition zweier Homomorphismen folgt aufgrund der Definitionen aus der Kommutativität des darunter liegenden Körpers  $K$ .

Die restlichen Axiome folgen ebenfalls durch „Nachrechnen“. □

**II.1.4 Definition:** Sei  $\text{Hom}_K(V, V)$  der Homomorphismenraum zweier  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$ .



Bildern von  $f(b_j)$  werden demnach  $n \cdot m$  Körperelemente  $k_{ij}$  eindeutig über die lineare Abbildung definiert, welche wir in der Matrix

$${}_B M_C(f) := \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{pmatrix}$$

so zusammenfassen, dass die Koeffizienten  $k_{ij}$  mit  $i \in \mathbb{N}_m$  der Linearkombinationen von  $f(b_j)$  in der  $j$ -ten Spalte enthalten sind.

**II.2.1 Definition:** Seien  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen den  $K$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  mit  $\dim(V) = n$  bzw.  $\dim(W) = m$ . Fixieren wir zwei Basen  $B$  bzw.  $C$  von  $V$  bzw.  $W$ , dann heißt die Matrix  ${}_B M_C(f)$  eine **Darstellungsmatrix** der linearen Abbildung  $f$  bezüglich der Basen  $B$  und  $C$ .

Mit Hilfe der Darstellungsmatrix weisen wir jedem Vektorraum-Homomorphismus und somit je einem Vektorraumpaar  $V$  und  $W$ , mit festgehaltenen Basen  $B$  und  $C$ , eine Matrix  ${}_B M_C(f)$  zu.

Formal definieren wir dadurch eine lineare Abbildung  ${}_B M_C : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow M_{mn}(K)$  zwischen  $K$ -Vektorräumen mit

$$f \mapsto {}_B M_C(f). \quad (\text{ISO})$$

Im nächsten Beispiel wird deutlich, dass die Basenwahl elementar für die Bestimmung der Darstellungsmatrix ist.

**II.2.2 Beispiel:** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 \\ v_1 + 5v_2 \end{pmatrix}.$$

a) Seien  $B := C := ((1, 0)^T, (0, 1)^T)$  Basen von  $\mathbb{R}^2$ , dann sind

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit  ${}_B M_C(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

b) Seien nun  $B := ((1, 0)^T, (0, 1)^T)$  und  $C := ((2, 1)^T, (1, 5)^T)$ , dann sind

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und somit  ${}_B M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

c) Seien nun  $B := ((1, 0)^T, (0, 1)^T)$  und  $C := ((1, 0)^T, (1, 1)^T)$ , dann sind

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit  ${}_B M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

Gehen wir den umgekehrten Weg, so können wir jeder Matrix  $A \in M_{mn}(K)$  nach Basenwahl eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  zuweisen, so dass  $A$  die Darstellungsmatrix von  $f$  ist.

Dazu wählen wir Basen  $B = (b_1, \dots, b_n)$  bzw.  $C := (c_1, \dots, c_m)$  von  $V$  bzw.  $W$  und interpretieren die Elemente der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{pmatrix}$$

als diejenigen Körperelemente der Linearkombinationen der Gleichungen (DA). Wir setzen also

$${}_B f_A(b_j) := \sum_{i=1}^m k_{ij} c_i = k_{1j} c_1 + k_{2j} c_2 + \dots + k_{mj} c_m, \quad (k_{ij} \in K, j \in \mathbb{N}_n).$$

Da eine lineare Abbildung vollständig durch die Bilder seiner Basen (vgl. [2], Abschnitt 5.1) beschrieben ist, haben wir dadurch eine lineare Abbildung  $g : V \rightarrow W$  vollständig beschrieben.

Auch in diesem Fall wird formal ein Vektorraum-Homomorphismus  ${}_B f_A : M_{mn}(K) \rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$  durch

$$A \mapsto {}_B f_A$$

erklärt.

**II.2.3 Beispiel:** Sei  $A \in M_{23}(\mathbb{R})$  eine Matrix definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und  $B := ((1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T)$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $C := ((1, 0)^T, (1, 1)^T)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ . Wir bestimmen die lineare Abbildung  $f := {}_B f_C(A) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und betrachten dazu, welche Körperelemente wir für die -bis auf Reihenfolge- eindeutige



Linearkombination der Bilder der Basisvektoren von  $B$  benötigen:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =: f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} =: f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch diese drei Gleichungen bzw. den darin enthaltenen Körperelementen ist die Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  bereits vollständig beschrieben, denn

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= f \left( v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= v_1 \cdot f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \cdot f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 + 5v_3 \\ v_2 + 3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**II.2.4 Satz** (Darstellungssatz): Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Sei  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$  und  $C := (c_1, \dots, c_m)$  eine Basis von  $W$ .

(i) Durch

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^m k_{ij} c_i = k_{1j} c_1 + k_{2j} c_2 + \dots + k_{mj} c_m, \quad (k_{ij} \in K, j \in \mathbb{N}_n).$$

wird eine Matrix  $A = (k_{ij}) \in M_{mn}(K)$  definiert. Umgekehrt induziert jede Matrix  $A = (k_{ij}) \in M_{mn}(K)$  bei festen Basen  $B$  und  $C$  genau eine lineare Abbildung  ${}_B f_C$ , welche durch

$${}_B f_A(b_j) := \sum_{i=1}^m k_{ij} c_i = k_{1j} c_1 + k_{2j} c_2 + \dots + k_{mj} c_m, \quad (k_{ij} \in K, j \in \mathbb{N}_n).$$

vollständig bestimmt ist.

(ii) Der Vektorraum  $\text{Hom}_K(V, W)$  ist isomorph zum Vektorraum der Matrizen  $M_{mn}(K)$ , d.h. die Abbildung (ISO) ist ein Isomorphismus.

**II.2.5 Folgerung:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $W$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $m \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$\dim(\operatorname{Hom}_K(V, W)) = mn.$$

*Beweis.* Da  $\operatorname{Hom}_K(V, W)$  gemäß Satz II.2.4 isomorph zu  $M_{mn}(K)$  ist und  $\dim(M_{mn}(K)) = mn$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

### III. Der Dualraum

In den Präliminarien haben wir den Vektorraum  $\text{Hom}_K(V, W)$  kennen gelernt, der alle Vektorraum-Homomorphismen  $V \rightarrow W$  als Elemente enthält. Da jeder Körper  $K$  auch als 1-dimensionaler Vektorraum über sich selbst interpretiert werden, ist  $\text{Hom}(V, K)$  ein Spezialfall des Homomorphismenraumes.

#### 1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Satz II.1.3 besagt, dass  $\text{Hom}_K(V, W)$  ein Vektorraum ist. Somit ist auch  $\text{Hom}_K(V, K)$  ein  $K$ -Vektorraum, den wir mit einem eigenen Namen auszeichnen.

**III.1.1 Definition:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, dann nennen wir  $\text{Hom}(V, K)$  den **Dualraum** von  $V$  und notieren diesen mit  $V^*$ . Die Elemente von  $V^*$  heißen **Linearformen**.

Eine Linearform von  $V$  ist also eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $K$ , die nicht notwendiger Weise endlich-dimensional sein muss. Ist  $V$  von endlicher Dimension  $n \in \mathbb{N}$ , dann besitzt  $V^*$  gemäß Folgerung II.2.5 ebenfalls die Dimension  $n = 1 \cdot n$ . Wählen wir die Basen  $B = (b_1, \dots, b_n)$  und  $C = (1)$  von  $V$  und  $K$ , dann ist  ${}_B M_C : V^* \rightarrow M_{1n}$  definiert durch

$$f \mapsto {}_B M_C(f) \quad (\forall f \in V^*)$$

gemäß dem Darstellungssatz II.2.4 ein Vektorraum-Isomorphismus und

$$A \mapsto {}_B f_C(A) \quad (\forall A \in M_{1n}(K))$$

ist zu  ${}_B M_C(f)$  invers.

Sei  $E := (e_{11}, \dots, e_{1n})$  die Standardbasis von  $M_{1n}(K)$ , dann ist  ${}_B f_C(e_{11}), \dots, {}_B f_C(e_{1n})$  eine Basis von  $V^*$ , da Isomorphismen Basen auf Basen abbilden. Für alle  $i \in \mathbb{N}_n$  ist  ${}_B f_C(e_{1i}) : V \rightarrow K$  mit

$${}_B f_C(e_{1i})(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}.$$

Untersuchen wir die Situation in endlichen Vektorräumen  $\mathbb{F}_q^n$ .

#### III.1.2 Beispiel:

- a) Sei  $\mathbb{F}_2^2$  der endliche Vektorraum mit  $4 = 2^2$  Elementen über dem Körper  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ . Seien weiter  $B$  die Standardbasis von  $\mathbb{F}_2^2$  und der Skalar 1 die Basis  $C$  von  $\mathbb{F}_2$ .

Eine Linearform  $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2$  ordnet jedem der vier Elemente des Vektorraumes entweder die 0 oder die 1 zu. Aufgrund der Eigenschaften linearer Abbildungen ist  $f(0,0)^T = 0$  und bereits gänzlich durch die Bilder der Vektoren aus  $B$  bestimmt.

Das ist auch der Grund warum es genau  $q^n$  Funktionale in  $\mathbb{F}_q^n$  gibt - jedem der  $n$  Basisvektoren von  $\mathbb{F}_q^n$  können wir genau  $q$  Elemente des Grundkörpers  $\mathbb{F}_q$  zuordnen. In unserem Fall existieren also exakt  $4 = 2^2$  Linearformen, welche in Tabelle III.1 explizit aufgeführt sind.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	0	1	0	1
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	0	0	1	1
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	0	1	1	0

Tab. III.1.: Linearformen von  $\mathbb{F}_2^2$

Angenommen  $f$  ist eine Linearform und wir kennen bereits die Bilder  $f(1,0)^T$  und  $f(0,1)^T$  der Basisvektoren, dann gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

D.h.  $f(1,1)^T$  ist aufgrund der Linearität von  $f$  nicht mehr frei wählbar, sondern bestimmt sich als die Summe von  $f(1,0)^T$  und  $f(0,1)^T$ .

Die Darstellungsmatrizen die in Tabelle III.1 aufgeführten Linearformen ergeben sich durch das im Darstellungssatz beschriebenen Verfahren.

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= 0 \cdot 1, & f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 0 \cdot 1, & \Rightarrow {}_B M_C(f_1) &= (0, 0) \\ f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= 1 \cdot 1, & f_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 0 \cdot 1, & \Rightarrow {}_B M_C(f_2) &= (1, 0) \\ f_3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= 0 \cdot 1, & f_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 1 \cdot 1, & \Rightarrow {}_B M_C(f_3) &= (0, 1) \\ f_4\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= 1 \cdot 1, & f_4\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 1 \cdot 1, & \Rightarrow {}_B M_C(f_4) &= (1, 1) \end{aligned}$$

Dass jede Linearform durch eine  $1 \times 2$ -Matrix repräsentiert wird, ist aufgrund der Dimension von  $\mathbb{F}_2^2$  und dem Grundkörper leicht nachzuvollziehen. An diesem Beispiel ist also die im Darstellungssatz II.2.4 postulierte Isomorphie zwischen  $M_{12}(\mathbb{F}_2)$  und  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2^2, \mathbb{F}_2)$  besonders leicht zu erkennen.

- b) Sei  $V$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum auf dem Intervall  $[a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$  der differenzierbaren Funktionen. Dann sind

$$\begin{aligned} f_1 : V &\rightarrow \mathbb{R} & \text{definiert durch} & & g &\mapsto \int_a^b g(x) dx \\ f_2 : V &\rightarrow \mathbb{R} & \text{definiert durch} & & g &\mapsto g'(c) \end{aligned}$$

für ein gegebenes  $c \in [a, b]$  Linearformen auf  $V$ , d.h.  $f_1, f_2 \in V^*$ . Siehe dazu Sätze 79.4 und 47.1 in [7].

## 2. Duale Basen und Vektoren

Seien  $B := (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$  und  $C := (c_1) := (1)$  bestehe einzig aus dem Einselement des Körpers  $K$ . Weiter seien  $E := (E_1, \dots, E_n)$  die Standardbasis des  $n$ -dimensionalen Vektorraumes  $M_{1n}(K)$  und

$$B^* := ( b_1^* := {}_B f_C(E_1), \dots, b_n^* := {}_B f_C(E_n) )$$

ein  $n$ -Tupel bestehend aus Linearformen  $b_j^* = {}_B f_C(E_j) : V \rightarrow K$  mit  $j \in \mathbb{N}_n$ . Die Zeilenvektoren

$$E_j = (e_{j1}, \dots, e_{ji}, \dots, e_{jn}) \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}_n \quad \text{und} \quad e_{ji} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

dienen als Darstellungsmatrix, welche die Abbildungen  $b_j^* = {}_B f_C(E_j)$  vollständig determinieren. Dabei bestimmt der Eintrag  $e_{ji}$  des Zeilenvektors  $E_j$  das Bild der Basis  $b_j^*(b_i)$  für alle  $i \in \mathbb{N}_n$ , so dass dadurch sämtliche Bilder  $b_j^*(b_1), \dots, b_j^*(b_n)$  durch den Zeilenvektor  $E_j$  und somit die Linearform  $b_j^*$  selbst definiert werden. Da  $\dim(K) = 1$  ist, kommt für  $b_j^*(b_i) = e_{ji} \cdot c_1 = e_{ji}$  nur  $e_{ij} = 1$  oder  $e_{ij} = 0$  in Frage, je nachdem ob  $i = j$  oder  $i \neq j$  ist. Offenbar gilt dann für alle  $i, j \in \mathbb{N}_n$

$$b_i \mapsto b_j^*(b_i) =: \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}, \quad (\text{III.1})$$

d.h. unter der  $j$ -ten Linearform  $b_j^* : V \rightarrow K$  werden alle Basisvektoren  $b_i$  mit  $i \in \mathbb{N}_n$  und  $i \neq j$  auf 0 abgebildet. Nur der Basisvektor  $b_j$  wird unter  $b_j^*$  auf 1 und damit auf den gewählten Basisvektor  $c_1 = 1$  von  $K$  abgebildet. Dadurch entsteht eine eindeutige Zuordnung zwischen dem Basisvektor  $b_j$  und der Linearform  $b_j^*$ .

**III.2.1 Satz:** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  mit Basis  $B = (b_1, \dots, b_n)$  und sei  $V^*$  der Dualraum von  $V$  mit Basis  $B^* := (b_1^*, \dots, b_n^*)$ . Dann gelten:

- (i)  $B^*$  ist eine durch (III.1) eindeutig bestimmte Basis des  $K$ -Vektorraumes  $V^*$ .
- (ii) Ist ferner  $f : V \rightarrow K$  eine Linearform ungleich der Nullabbildung, dann ist  $\dim(\text{Kern}(f)) = n - 1$ .

*Beweis.* (i) Wir zeigen, dass  $B^*$  linear unabhängig und ein Erzeugendensystem ist. Dazu betrachten wir zunächst die Linearkombination

$$0 = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n k_i \cdot b_i^* \right)}_{\in \text{Hom}_K(V, K)}(b_i)$$

bestehend aus der Summe und dem Skalarprodukt von Linearformen. Dadurch ergibt sich eine Abbildung für dessen Bild des Basisvektors  $b_i$  wir uns interessieren. Aufgrund der Definitionen (III.1) und der des Vektorraumes  $\text{Hom}_K(V, K)$  folgt

$$0 = \left( \sum_{i=1}^n k_i \cdot b_i^* \right)(b_i) = k_1 \cdot b_1^*(v_i) + \dots + k_n \cdot b_n^*(v_i) = k_i,$$

d.h.  $k_i$  muss gleich 0 sein. Da diese Gleichung für alle  $i \in \mathbb{N}_n$  gilt, folgt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus  $B^*$ . Nun zeigen wir, dass  $B^*$  auch ein Erzeugendensystem und damit eine Basis von  $V^*$  ist. Dazu sei  $f \in V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ . Da die Bilder einer Basis einer linearen Abbildung diese gänzlich bestimmen, setzen wir

$$k_i := f(b_i) \quad (\forall i \in \mathbb{N}_n).$$

Demnach lässt sich  $f$  als Linearkombination der Basisvektoren durch

$$f = \sum_{i=1}^n k_i b_i^*$$

darstellen, da auch  $(\sum_{i=1}^n k_i b_i^*)(b_i) = k_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}_n$  ist. Bleibt zu zeigen, dass  $B^*$  eindeutig ist. Hierzu nehmen wir an, dass  $\tilde{B}^* = (\tilde{b}_1^*, \dots, \tilde{b}_n^*)$  eine weitere Basis ist, die (III.1) genügt. Dann gibt es für jeden der Basisvektoren  $\tilde{b}_j^*$  mit  $j \in \mathbb{N}_n$  eindeutig bestimmte Skalare  $k_{sj} \in K$ ,  $s \in \mathbb{N}_n$  mit

$$\tilde{b}_j^* = \sum_{s=1}^n k_{sj} b_s^*.$$

Es folgt

$$\delta_{ij} = \tilde{b}_j^*(b_i) = \sum_{s=1}^n k_{sj} b_s^*(b_i) = \sum_{s=1}^n k_{sj} \delta_{si} = k_{ij},$$

d.h. die Basisvektoren beider Basen  $B^*$  und  $\tilde{B}^*$  besitzen dieselbe eindeutigen Linearkombinationen und sind deshalb identisch.

(ii) Da gemäß Voraussetzung  $f$  nicht die Nullabbildung ist, hat  $\text{Bild}(f)$  mindestens die Dimension 1. Da  $\text{Bild}(f) \subseteq K$  und  $\dim(K) = 1$ , folgt, dass  $\dim(\text{Bild}(f)) \leq 1$ . Somit kann  $\text{Bild}(f)$  nur von Dimension 1 sein, was gemäß der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ([2], Abschnitt 5.3) gerade die Behauptung  $\dim(\text{Kern}(f)) = n - 1$  impliziert. □

Im unendlich-dimensionalen Fall  $\dim(V) = \infty$  kann analog aus einer Basis  $B$ , wie im Beweis (i) des letzten Satzes, eine linear unabhängige Menge  $B^*$  konstruiert werden. Allerdings ist  $B^*$  dann kein Erzeugendensystem, z.B. lässt sich eine Linearform  $f: V \rightarrow K$  mit  $f(b) = 1$  für alle  $b \in B$  nicht als endliche Linearkombination von Elementen aus  $B^*$  darstellen.

**III.2.2 Folgerung:** Seien  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $K$  mit Basis  $B = (b_1, \dots, b_n)$  und  $V^*$  der Dualraum von  $V$  mit Basis  $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ . Dann sind  $V$  und  $V^*$  isomorph vermöge des Isomorphismus  $\phi: V \rightarrow V^*$  definiert durch

$$\sum_{i=1}^n k_i b_i \mapsto \phi\left(\sum_{i=1}^n k_i b_i\right) := \sum_{i=1}^n k_i b_i^*.$$

Den Isomorphismus  $\phi$  haben wir bereits im Beweis (i) des letzten Satzes angewendet. Dort haben wir nachgewiesen, dass  $B^*$  eine Basis von  $V^* \cong V$  ist, die in besonderer Weise durch (III.1) mit der Basis  $B$  verknüpft ist.

**III.2.3 Definition:** Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim(V) = n$  und  $V^*$  der dazu duale  $K$ -Vektorraum.

1. Die Basis  $B^* := (b_1^*, \dots, b_n^*)$  wird die zu  $B := (b_1, \dots, b_n)$  **duale Basis** genannt.
2. Der Vektor  $v^* := \phi(v)$  des Dualraumes  $V^*$  wird der zu  $v \in V$  **duale Vektor** genannt.

Wenden wir den Isomorphismus  $\phi$  auf einen Basisvektor  $b_j$  von  $V$  an, so erhalten wir  $\phi(b_j) = \phi(1 \cdot b_j) = 1 \cdot b_j^* = b_j^*$  den zu  $b_j$  dualen Basisvektor.

**III.2.4 Beispiel:** Die Vektoren  $b_1 := (4, 3)^T$  und  $b_2 := (3, 2)^T$  bilden eine Basis  $B$  des reellen Vektorraumes  $\mathbb{R}^2$ , da

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \neq 0.$$

Ein beliebiger Vektor  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  kann als Linearkombination

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

der Basis  $B$  dargestellt werden. Wie in Beispiel II.2.3 sind wir an den für die Linearkombination notwendigen Körperelementen interessiert, weshalb wir die obige Gleichung nach  $(k_1, k_2)^T$  auflösen und dadurch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 3y \\ 3x - 4y \end{pmatrix}$$

erhalten. Mit dieser Formel können wir z.B. die Körperelemente des Vektors  $(x, y)^T := (1, 0)^T$  bestimmen, so dass diese als Linearkombination der Basisvektoren aus  $B$  gerade den vorgegebenen Vektor  $(1, 0)^T$  eindeutig bestimmt. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 3y \\ 3x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d.h. es ist  $-2b_1 + 3b_2 = (1, 0)^T$ .

Im Allgemeinen sind  $k_1 = (-2x + 3y)$  und  $k_2 = (3x - 4y)$  die zu den Basen  $b_1$  bzw.  $b_2$  zugehörigen Koeffizienten innerhalb einer Linearkombination, so dass sich daraus innerhalb einer Linearkombination der vorgegebene Vektor  $(x, y)^T$  ergibt. Formal bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-2x + 3y) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x - 4y) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gemäß Definition III.2.3 sind  $b_1^*, b_2^* : V \rightarrow K$  Linearformen mit  $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ . Für unser Beispiel bedeutet dies, dass  $b_1^*(b_1) = 1$  und  $b_1^*(b_2) = 0$ . Beachten wir ferner, dass  $b_i^*$  eine lineare Abbildung ist, so ergibt sich die Funktionengleichung

$$\begin{aligned} b_1^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= b_1^* \left( (-2x + 3y) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x - 4y) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= (-2x + 3y) \underbrace{b_1^* \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=1} + (3x - 4y) \cdot \underbrace{b_1^* \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=0} \\ &= (-2x + 3y). \end{aligned}$$

Analog folgt aus  $b_2^*(b_1) = 0$ ,  $b_2^*(b_2) = 1$  und der Linearität der Abbildung  $b_2^*$  die Funktionsgleichung

$$\begin{aligned} b_2^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= b_2^* \left( (-2x + 3y) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x - 4y) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= (-2x + 3y) \cdot b_2^* \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x - 4y) \cdot b_2^* \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (3x - 4y). \end{aligned}$$

Die zu  $B$  duale Basis  $B^*$  besteht demnach aus den beiden Linearformen  $b_1^*(x, y)^T = -2x + 3y$  und  $b_2^*(x, y)^T = 3x - 4y$ .

Sei nun  $v := \sum_{i=1}^2 k_i b_i$  ein Vektor des  $\mathbb{R}^2$ , dann erhalten wir, vermöge des in Folgerung III.2.2 erklärten Isomorphismus,

$$\begin{aligned} \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \phi \left( (-2x + 3y) \cdot b_1 + (3x - 4y) \cdot b_2 \right) \\ &= \phi \left( (-2x + 3y) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x - 4y) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= [(-2x + 3y) \cdot b_1^* + (3x - 4y) \cdot b_2^*] \end{aligned}$$



den zu  $v$  dualen Vektor  $v^* \in V^*$ . Der Vektor  $(5, 4)^T$  wird auf die Linearform

$$v^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1^* - b_2^* = 2 \cdot (-2x + 3y) - (3x - 4y) = -7x + 10y$$

abgebildet.

### 3. Bidualraum

Bereits in Satz II.1.3 haben wir festgestellt, dass  $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$  ein Vektorraum ist. Was würde passieren, wenn wir die Konstruktionsprizip eines Dualraumes auf den Dualraum  $V^*$  selbst anwenden?

**III.3.1 Definition:** Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $V^*$  sein Dualraum, dann nennen wir  $\text{Hom}_K(V^*, K)$  den **Bidualraum** von  $V$  und notieren diesen mit  $V^{**}$ .

Verdeutlichen wir uns die Situation.  $V$  ist ein beliebiger  $K$ -Vektorraum,  $V^*$  ist der Vektorraum aller Linearformen  $V \rightarrow K$  und  $V^{**}$  ist der  $K$ -Vektorraum aller Linearformen von  $V^* \rightarrow K$ , wobei die Elemente von  $V^*$  selbst Linearformen sind. Jedes Element aus  $V^{**}$  ordnet demnach jeder Linearform von  $V^*$  ein Körperelement zu.

**III.3.2 Satz:** Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $v^{**} \in V^{**}$  definiert durch  $f \mapsto v^{**}(f) := f(v)$ . Dann ist  $\psi : V \rightarrow V^{**}$  definiert durch

$$v \mapsto \psi(v) := v^{**}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

*Beweis.* Wir müssen zunächst zeigen, dass die Definition von  $v^{**}$  sinnvoll ist. Offenbar gilt  $\text{Bild}(v^{**}) \subseteq K$ , da für jedes  $f \in V^* = \text{Hom}_K(V, K)$  das Bild  $v^{**}(f) = f(v)$  ein Körperelement ist. Seien nun  $f, g \in V^*$  und  $k \in K$ , dann gelten aufgrund der Definitionen von  $v^{**}$  und  $(f + g)$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} v^{**}(f + g) &= (f + g)(v) = f(v) + g(v) = v^{**}(f) + v^{**}(g) && \text{und} \\ v^{**}(kf) &= (kf)(v) = k \cdot f(v) = k \cdot v^{**}(f). \end{aligned}$$

Damit folgt, dass  $v^{**}$  linear ist, weshalb insgesamt  $v^{**} \in V^{**} = \text{Hom}_K(V^*, K)$  gezeigt ist. Bleibt nachzuweisen, dass  $\psi : V \rightarrow V^{**}$  linear und bijektiv ist. Mit den bisher getroffenen Konventionen und  $v, w \in V$  gilt

$$\psi(v + w)(f) = (v + w)^{**}(f) = f(v + w) = f(v) + f(w) = v^{**}(f) + w^{**}(f) = \psi(v)(f) + \psi(w)(f).$$

Analog ergibt sich

$$\psi(kv)(f) = (kv)^{**}(f) = f(kv) = k \cdot f(v) = k \cdot v^{**}(f) = k \cdot \psi(v)(f).$$

Es genügt zu zeigen, dass  $\psi$  injektiv ist. Sei  $v$  ein Vektor aus  $V$  ungleich dem Nullvektor, den wir zu einer vollen Basis ergänzen. Können wir nachweisen, dass es eine Linearform  $f \in V^*$  gibt mit  $v^{**}(f) = f(v) \neq 0$ , dann folgt die Injektivität. Wir setzen  $f(w) := 1$  für alle  $w \in V$ , dann ist  $v^{**}(f) = f(v) = 1$ .  $\square$

Wir haben gezeigt, dass  $V$  und  $V^{**}$  in besonders natürlicher Weise isomorph sind, da jedem Vektor  $v$  via  $\psi$  sein eigenes Bild  $f(v)$  zugeordnet bekommt. Daher wird oftmals  $V = V^{**}$  gesetzt, d.h. wir identifizieren  $V^{**}$  mit  $V$  selbst.

## Literaturverzeichnis

- [1] Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Egbert Brieskorn, 1. Auflage, 1983, Vieweg Verlag.
- [2] Lineare Algebra, Albrecht Beutelspacher, 5. Auflage, 2001, Vieweg Verlag.
- [3] Lineare Algebra I, Luise Unger, Skript der FernUniversität in Hagen, 2002.
- [4] Lineare Algebra, Hans-Joachim Kowalsky, 2. Auflage, 1965, Walter de Gruyter & Co.
- [5] Lineare Algebra und Analytische Geometrie – Band I, Hermann Schaal, 2. Auflage 1980, Vieweg Verlag.
- [6] Algebra und Geometrie, A.L. Oniscik, R. Sulanke, 1986, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [7] Lehrbuch der Analysis - Teil 1, Harro Heuser, 14. Auflage, 2001, Teubner Verlag.
- [8] Algebraic Graph Theory, Norman Biggs, 2. Edition, 2001, Cambridge University Press.