Kardinal- und Ordinalzahlen

Zähmung des Unendlichen

Alexander Hölzle

01.05.2008

Inhaltsverzeichnis

1 Übersicht und Präliminarien

In diesem Dokument werden wir uns der Mengenlehre und somit unmittelbar auch dem Unendlichen widmen. Beide Themen sind nicht nur mathematischer sondern auch philosophischer Natur. Der Schöpfer der Mengenlehre GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR (1845-1918) hat selbst lange Zeit als Mathematiker und Philosoph gearbeitet und publiziert. Will man die Mengenlehre verstehen, so kommt man nicht umhin sich mit der Unendlichkeit vertraut zu machen. In unserer Alltagswelt sind jedoch sämtliche Dinge endlich, wie also soll man als endliches Wesen die Unendlichkeit begreifen? Das Genie GEORG CANTOR hat einen Weg ins Paradies „Mengenlehre“ gefunden und dennoch wurden seine überragenden Leistungen erst postum geehrt. Zu Lebzeiten stieß CANTOR überwiegend auf Unverständnis und Missachtung. In diesem Manuskript werden wir zwei große Entdeckungen CANTORS unter die Lupe nehmen: zum Einen die Kardinal- und zum Anderen die Ordinalzahlen.

Die von CANTOR gegebene Definition einer Menge werden wir direkt im Anschluss studieren und deren Unschärfe an Hand von Antinomien erläutern. Im Anschluss betrachten wir das wohl bekannteste und wichtigste Axiomensystem der Mengenlehre ZFC. Auf diesem mathematischen Fundament, der axiomatischen Mengenlehre, werden wir Ordnungen einführen und genauer untersuchen. Ordnungen spielen eine wesentliche Rolle im Zusammenhang mit Kardinal- und Ordinalzahlen und darüber hinaus. Wir werden viele wunderschöne Beweise und Sätze, wie z.B. die Diagonalargumente von CANTOR oder den Satz von SCHRÖDER & BERNSTEIN, kennenlernen, die zum Teil auch im „BUCH der Beweise“, [2] enthalten sind.

Obwohl auch anspruchsvolle Sätze angeführt und bewiesen werden benötigt man für das Verständnis dieses Dokuments nur recht wenig Vorwissen. Lediglich Grundlegendes aus der Mengenlehre sollte man parat haben. So sollte einem klar sein, was man z.B. unter der Vereinigung oder dem Durchschnitt von Mengen versteht. Ferner sollten einem die naiven Defintionen der wichtigsten „Zahlenbereiche“, wie z.B.

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$

oder den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (die „Zahlengerade“) bewusst sein. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{N}$ werden wir mengentheoretisch weiter unten einführen.

2 Von der naiven zur axiomatischen Mengelehre

2.1 Antinomien in der naiven Mengenlehre

GEORG CANTOR (1845-1918) begründete in der Mitte des 19. Jahrhunderts die *Mengenlehre*, die er zu Beginn noch *Mannigfaltigkeitslehre* nannte. Er formulierte 1895 die brühmte Definition

> *Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Um Objekte $m \in M$ einer Menge M unterscheiden zu können, bedürfen sie – gemäß genannter Definition – gewissen Eigenschaften $E(M)$. Umgekehrt können wir mit Hilfe einer Eigenschaft E und klar unterscheidbaren Objekten x eine Menge $\{x|\ E(x)\}$ erklären. Auf Grundlage dieser Definition können logische innere Widersprüche hergeleitet werden, welche es in der Mathematik zu vermeiden gilt. Georg Cantor selbst hat dies frühzeitig erkannt und verfasste deshalb eine Doktrin, welche, wenn man sich danach richtete, alle üblichen Antonomien verhinderte.

Die Unschärfe Cantors Definition erkannt auch Betrand Russel – von Ihm stammt wohl die bekannteste Antinomie:

> Der Dorfbarbier ist definiert als derjenige Dorfbewohner, der alle Dorfbewohner rassiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert der Barbier sich selbst?

Zunächst nehmen wir an, dass der Barbier sich selbst rassiert: In diesem Fall gehört der Barbier selbst zu denjenigen Dorfbewohnern, die nicht vom Barbier rassiert werden, was jedoch der Eingangs gemachten Annahme widerspricht. Nehmen wir nun an, der Barbier würde sich nicht selbst rasieren, dann gehört der Barbier also zu der Menge, die der Barbier rasiert. Auch diese Annahme führt also zum Widerspruch.

In die Sprache der naiven Mengenlehre gekleidet, kann man das Problem wie folgt beschreiben:

Sei M die *Menge aller Mengen*, die sich nicht selbst als Element enthalten, d.h.

$$M := \{X|\ X \notin X\}.$$

Ist dann M selbst in M enthalten?

Man beachte, dass die Menge M der Definition Cantors genügt. Zunächst nehmen wir an es würde $M \in M$ gelten, dann würde gemäß Definition $M \notin M$ folgen was im Widerspruch zur Annahme steht. Ist aber $M \notin M$, dann ist M gemäß Definition ein Element von M. Man beachte insbesondere, dass hier die Menge aller Mengen mit einer bestimmten Eigenschaft betrachtet wird.

Eine andere Art von Antinomie, kann man durch Aussage speziellen Typs erhalten. Beispielsweise ist die Aussage

> „Ich lüge mit diesem Satz“

absurd.

Nehmen wir an, dass die Aussage „Ich lüge mit diesem Satz“ wahr ist, dann lügt er gemäß dieser Aussage. Lügt er hingegen, dann sagt er die Wahrheit. Derartige Paradoxa kann man dadurch umschiffen, in dem man Aussagen verbietet, die auf sich selbst Bezug nehmen.

Weitere bekannte Antinomien sind

- Antinomie von Burali-Forti: Die Gesamtheit aller Ordinalzahlen ist keine Menge.
- Antinomie von Cantor: Die Gesamtheit aller Kardinalzahlen ist keine Menge.

Da wir erst weiter unten feststellen werden, was genau Kardinal- und Ordinalzahlen sind ist eine exakte Deutung der oben aufgeführten Antinomien sinnlos. Hintergrund dieser Antinomien ist, dass es Mengen gemäß der Definition von Cantor gibt, die einfach „zu groß“ sind und deshalb auf Widersprüche führen. Um diese Bredouille zu überwinden bringt man einen neue Hauptfigur, die so genannten **echten Klassen**, ins Spiel, verbannt diese allerdings dazu, nicht auf die Bühne zu kommen. D.h. man definiert „Vielheiten“, die keine Mengen mehr sein können, einfach als echte Klassen.

2.2 Die axiomatische Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel

Ernst Zermelo und später auch Abraham Adolf Fraenkel haben in Schritten ein Axiomensystem ZFC der Mengenlehre konstruiert, welches die im letzten Abschnitt beschriebenen Antinomien vollständig ausschließt. Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (kurz ZFC) ist das verbreitetste Axiomsystem und somit Grundlage fast aller mathematischer Disziplinen. In folgender Auflistung der Axiome des ZFC sei die Konvention getroffen, dass verschieden bezeichnete Variablennamen nicht gleich sind.

Existenz der leeren Menge Es gibt eine Menge $\varnothing$, die keine Elemente enthält.

Extensionalitätsaxiom Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

Paarmengenaxiom Zu je zwei Mengen x, y existiert eine Menge z, die genau x und y als Element hat.

Vereinigungsmengenaxiom Zu jeder Menge x existiert eine Menge y, deren Elemente genau die Elemente der Elemente von x sind.

Potenzmengenaxiom Zu jeder Menge x existiert eine Menge y, die genau die Teilmengen von x als Elemente besitzt.

Aussonderungsaxiom Zu jeder Eigenschaft ϕ und jeder Menge x gibt es eine Menge y, die genau die Elemente von x enthält, auf die ϕ zutrifft.

Ersetzungsschema Das Bild einer Menge unter einer Funktion ϕ ist eine Menge.

Unendlichkeitsaxiom Es existiert eine Menge x, die die leere Menge $\varnothing$ als Element enthält und die mit jedem ihrer Elemente y auch $\{y\}$ als Element enthält.

Fundierungsaxiom Jede nicht leere Menge x hat ein Element y, das mit x kein Element gemeinsam hat.

Auswahlaxiom Ist x eine Menge, deren Elemente nicht leer und paarweise disjunkt sind, so existiert eine Menge y, die mit jedem Element von x genau ein Element gemeinsam hat.

2.3 Ordnungen auf Mengen

> „Mächtigkeit“ oder „Cardinalzahl“ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird. — Georg Cantory

Der Begriff „Ordnung“ ist entscheidend bei dieser von Cantor gegebenen Definition einer allgemeinen Kardinalzahl, denn damit wollte er ausdrücken, dass die Kardinalzahlen total geordnet werden können. Um die Begrifflichkeiten und einige Zusammenhänge zu klären, werden wir deshalb etwas Ordnungstheorie studieren.

2.1 Definition: Eine (reflexive) **Teilordnung** (auch Halbordnung, partieller Ordnung oder Ordnungsrelation) der Menge X ist eine binäre Relation R (d.h. eine Teilmenge) von $X \times X$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $(x, x) \in R$ für alle $x \in X$, (Reflexivität)

(ii) Aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ folgt $x = y$, (Antisymmetrie)

(iii) Aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt $(x, z) \in R$. (Transitivität)

Anstelle von $(x, y) \in R$ verwendet man die Inzifschreibweise $x\ R\ y$, wobei wir stets das Symbol „$\leq$“ für die Relation R verwenden werden. Das Paar $(X, \leq)$ nennt man **halbgeordnete Menge**. Das Symbol $x < y$ bedeutet $x \leq y$ *und* $x \neq y$.

Die Forderungen (i), (ii) und (iii) sind anschauliche Bedingungen, die man an eine Relation stellen würde, wenn es um Größenvergleiche geht. Dabei ist es zunächst durchaus zugelassen, dass zwei Elemente aus X *gar nicht* miteinander verglichen werden können, d.h., dass weder $x \leq y$ noch $y \leq x$ gilt. Gilt entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$, so nennen wir x und y **vergleichbar** und sonst **unvergleichbar**.

Eine halbgeordnete Menge X heißt genau dann **total geordnet** oder **linear geordnet**, wenn für *alle* Elemente $x, y \in X$ entweder die Beziehung $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, d.h., wenn jedes Element aus X mit jedem anderen Element vergleichbar ist. Die Relation $\leq$ nennen wir dann auch **Totalordnung**. Es ist klar, dass dann für alle $x, y \in X$ der Zusammenhang

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y \text{ oder } x = y$$

gilt. Eine halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ ist also genau dann total geordnet, wenn man für alle Mengenelemente $x, y \in X$ entweder $x < y$ oder $y < x$ oder aber $x = y$ (**Trichotomie**) nachweisen kann. Man beachte, dass nur eine der drei Relationen erfüllt sein darf!

2.2 Beispiel: Es sei X eine Menge.

a) Sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X mit der Inklusion „$\subseteq$" als Relation. Dann ist $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ eine halbgeordnete Menge, die Inklusion bildet also eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(X)$.

b) Sei $X := \{1,2,3\}$, dann besteht die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ aus insgesamt acht Teilemgen, im Einzelnen sind das

$$\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}.$$

Das Paar $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist *keine* Totalordnung, da z.B. $\{1\}$ nicht mit der Teilmenge $\{2,3\}$ verglichen werden kann, d.h. es gilt weder $\{1\} \subseteq \{2,3\}$ noch $\{1\} \supseteq \{2,3\}$.

c) Betrachten wir nun die Relation $\leq$ auf der Menge $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$x \ \leq \ y :\Leftrightarrow \ y - x \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist $(\mathbb{Z}, \leq)$ eine total geordnete Menge.

d) Eine der wohl wichtigsten Totalordnungen überhaupt ist $(\mathbb{N}_0, <)$, wobei $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen inklusive der Null zusammen mit der üblichen Ordnung sein soll. Für zwei beliebige natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt stets entweder $n < m$, $m < n$ oder die Identität (Trichotomie). Offensichtlich gilt

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < n < n+1 < \ldots \ . \tag{ON1}$$

Ist $x \leq y$ in $(X, \leq)$, so nennen wir die *Unterordnung* der Menge $\{a \in X |\ x \leq a \leq y\ \}$ das **Intervall** $[x,y]$ von x und y in X. Die Intervalle $[x,x]$ heißen **trivial**. Gilt für $x \leq y$, dass $|[x,y]| = 2$, d.h. folgt aus $x \leq a \leq y$, dass $a = x$ oder $a = y$ ist, so sagen wir, y **bedeckt** x und notiere dies durch $x <_\bullet y$.

2.3 Definition: Eine *total geordnete* Teilmenge $\mathcal{K} := \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ einer *halbgeordnete* Menge $(X, \leq)$ nennen wir **Kette der Länge** n. Man beachte, dass alle Elemente in der Kette $\mathcal{K}$ verschieden sein müssen.

So ist z.B. $\{\ \varnothing,\ \{1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\}\ \}$ eine Kette der Länge 3 von $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Ketten der Länge n sind bis auf Isomorphie eindeutig. Eine Kette $\mathcal{K} := \{x_0 <_\bullet x_1 <_\bullet \ldots <_\bullet x_n\}$ heißt nicht weiter **unterteilbar** oder **maximal**. Wir sagen, dass ein Element $a \in X$ eine endliche Höhe in $(X, \leq)$ besitzt, wenn die Längen aller Ketten mit letztem Glied a nach oben beschränkt sind. Die **Höhe** $h(a)$ **eines Elements** $a \in X$ ist die maximale Länge einer Kette vom Nullelement 0 zu a.

Sind je zwei verschiedene Elemente aus $A \subseteq X$ nicht vergleichbar, so nennen wir A eine **Antikette**.

3 Von Kardinalzahlen

3.1 Unendliche Mengen und Kardinalzahlen

Zwei Dinge sind unendlich: Das Universum und die menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher. – Albert Einstein

Die Unendlichkeit ist in der modernen Mathematik allgegenwärtig und inzwischen auch unentbehrlich. Es verwundert also nicht, dass der Suchbegriff „Infinity" z.B. auf Google weit über 48 Millionen Ergebnisse liefert. Die Dezimaldarstellung der Zahl π, die Differential- und Integralrechnung oder die projektive Geometrie wären ohne die Unendlichkeit nicht denkbar. Erstaunlich ist allerdings, dass die „Unendlichkeit" in der Natur eigentlich nicht vorkommt. Den alten Griechen war deshalb wohl auch das Unendliche recht suspekt, deshalb verwendete wohl auch Euklid, in einem der berühmtesten mathematischen Sätze,

Die Primzahlen sind mehr als jede vorgegebene Menge von Primzahlen.

das Wort „unendlich" nicht. Heutzutage würde man schlichtweg schreiben, dass die Menge aller Primzahlen unendlich viele Elemente enthält.

Einer der fundamentalen Begriffe, die Cantor eingeführt hatte, war die der *Mächtigkeit* oder *Kardinalzahl* einer Menge M, welche die „Größe" einer Menge charakterisieren soll. Für endliche Mengen M ist es naheliegend die Kardinalzahl schlichtweg als die Anzahl der Elemente der Menge zu definieren, welche durch Abzählen bestimmt werden kann.

Doch wie groß sind Mengen mit unendlich vielen Elementen?

Eine konkrete Antwort auf diese Frage, kann niemand geben, doch man kann unendliche Mengen miteinander vergleichen und so eine Vorstellung davon bekommen, wie groß die Menge ist. Diesen Gedanken folgend gelangen wir zur

3.1 Definition: Zwei Mengen M und N haben die **gleiche Kardinalzahl** (oder die *gleiche Mächtigkeit* oder die *gleiche Kardinalität*), wenn es eine bijektive Abbildung von M nach N gibt. Man sagt auch: M und N sind gleich mächtig und schreibt $Card(A) = Card(B)$ oder $|M| = |N|$. Die Klasse aller zu M gleichmächtigen Mengen wird mit $|M|$ bezeichnet und heißt die zu M gehörige Kardinalzahl.

Diese Definition impliziert für endliche Mengen M und N, dass sie genau dann dieselbe Kardinalzahl besitzen, wenn $|M| = |N|$ gilt, d.h. wenn M und N gleich viele Elemente enthält.

3.2 Definition: Besteht eine Menge M aus $n := |M| \in \mathbb{N}$ Elementen, so sagen wir auch, dass M eine n-**Menge** ist.

Es ist also klar, dass eine n-Menge gerade die Kardinalzahl n besitzt.

Untersucht man die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$ so bekommt man einen ersten Eindruck vom Unendlichen. Zu jeder natürlichen Zahl n existiert eine noch größere natürliche Zahl $n + 1$, d.h. die natürlichen Zahlen finden kein Ende.

3.3 Definition: Eine Menge M heißt **abzählbar**, wenn die Menge der natürlichen Zahlen zum Durchnummerieren der Elemente von M ausreicht. Ist eine Menge M nicht gleichmächtig zu einer Teilmenge der natürlichen Zahlen, so heißt sie **überabzählbar**.

Jede endliche Menge ist abzählbar und es gibt unendlich abzählbare Mengen, wie z.B. $\mathbb{N}$ selbst. Überabzählbare Mengen besitzen jedoch stets unendlich viele Elemente. Mit den eben eingeführten Begriffen werden wir uns in den nächsten Abschnitten dem Unendlichen nähern und feststellen, dass es die Unendlichkeit nicht gibt – es gibt sehr viele verschiedene Unendlichkeiten!

3.2 „Gleichheit“ bei Mächtigkeiten

Zwei Mengen sind genau dann *von gleicher Kardinalzahl*, wenn wir jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zuordnen können, wobei die Zurodnung zwischen den Mengen eine bijektive Abbildung übernimmt. Gilt $|M| = |N|$, so ist eine vollständige Paarbildung der Elemente von M und N möglich.

Veranschaulichung wir uns was eine bijektive Zuordnung zweier gleichmächtiger Mengen, an Hand eines Hotels und seiner Gäste. Aus Gründen der Einfachheit besitzt unser Hotel nur Einzelzimmer und es wird weiter angenommen, dass sich nur ein Gast in jedem Zimmer aufhält.

Betrachten wir zunächst ein Hotel aus der Realwelt mit einer Menge an Gästen G und einer (endlichen) Menge an Zimmern Z. Das Hotel ist genau dann ausgebucht, wenn jedes Zimmer $z \in Z$ mit genau einem Gast $g \in G$ belegt ist. Unser Hotel kann also genau dann keinen Gast mehr aufnehmen, wenn alle Zimmer belegt sind.
In Hilberts Hotel, benannt nach nach dem großen Mathematiker David Hilbert, wird dagegen *niemals* ein Gast abgewiesen. Der wesentliche Unterschied zum gewöhnlichen Hotel ist, dass Hilberts Hotel (abzählbar) unendlich viele Zimmer $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind, besitzt. In einer Nacht in der das Hotel voll belegt ist, d.h. in jedem Zimmer z_i logiert bereits ein Gast g_i für $i = 1, 2, \ldots$, trifft eine weitere Person ein und fragt nach einem Zimmer. Die Rezeption teilt dem Gast mit, dass bereits alle Zimmer belegt seien – dies sei aber kein Problem, denn er könne in kürze das Zimmer z_1 beziehen. Damit dieses Zimmer frei wird bittet die Rezeption den Gast g_1 aus z_1 einfach ins Zimmer z_2 zu wechseln, entsprechend wird Gast g_2 aus Zimmer z_2 aufgefordert ins Zimmer z_3 umzuziehen usw. Da es unendliche viele Zimmer in Hilberts Hotel gibt, bereitet der Umzug der Gäste $g_i \mapsto z_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots$ (zumind. theoretisch) keine Probleme.

Einige Minuten später trifft ein Reisebus mit (abzählbar) unendlich vielen neuen Gästen (und somit auch Sitzen) $s_1, s_2, \ldots$ ein, dessen Insassen die Nacht in Hilberts Hotel verbringen möchten. Der Empfangschef kann es auch in diesem Fall schaffen alle Gäste unterzubringen, dazu bittet er alle Gäste der Zimmer z_i in das Zimmer z_{2i} umzuziehen, d.h. der Gast aus z_1 zieht ins Zimmer z_2, der Gast aus z_2 ins Zimmer z_4, usw. Damit sind alle Zimmer mit ungeradem Index, also sämtliche Zimmer z_{2i-1} für $i = 1, 2, \ldots$ frei geworden – dies sind abzählbar unendlich viele!

Im Gegensatz zu endlichen Mengen kann es also bei unendlichen Mengen M vorkommen, dass diese eine echte Teilmenge $M' \subsetneq M$ besitzt, so dass eine Bijektion $M' \to M$ existiert. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ besitzt bspw. unendlich viele gerade Zahlen $2i$ für $i \in \mathbb{N}$, d.h. die Abbildung $i \mapsto 2i$ ist eine Bijektion $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$. Damit ist auch klar, warum in Hilberts Hotel –auch bei einer Vollbelegung– noch abzählbar unendlich viele Gäste untergebracht werden können. So definierte Dedekind eine unendliche Menge wie folgt:

3.4 Definition: Eine Menge M ist genau dann **unendlich**, wenn es eine bijektive Abbildung von M auf eine echte Teilmenge $M' \subsetneq M$ gibt. Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie nicht unendlich ist.

Demnach ist eine Menge M genau dann endlich, wenn jede bijektive Abbildung von M in sich selbst eine Abbildung auf M sein muss. Betrachten wir nun die Klasse aller Mengen $\mathcal{M}$, zusammen mit der Relation

$$M \sim N \quad :\Leftrightarrow \quad M \text{ ist von gleicher Mächtigkeit wie } N.$$

Dann ist die binäre Relation $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Offensichtlich gilt für jede Menge M die Beziehung $M \sim M$, wobei eine beliebige Permutation der Menge M (z.B. die Identität) die Rolle der Bijektion übernehmen kann, d.h. $\sim$ ist reflexiv. Da die Umkehrfunktion einer Bijektion wieder bijektiv ist, ist die Relation $\sim$ offensichtlich symmetrisch. Seien M, N, O drei beliebige Mengen mit $M \sim N$ und $N \sim O$, dann existieren zwei Bijektionen $\phi : M \to N$ und $\psi : N \to O$, so dass das Komposituum $\psi \circ \phi : M \to O$ den Nachweis der Transitivität von $\sim$ erbringt. □

Die Äquivalenzrelation $\sim$ erlaubt es uns nun $\mathcal{M}$ in Klassen der Art

$$[M] := \{N \in \mathcal{M} |\ M \sim N\}$$

zu partitionieren, d.h. in disjunkte Mengen aufzuteilen, wobei M als der Repräsentant der Äquivalenzklasse $[M]$ bezeichnet wird.

Alle n-Mengen mit $n \in \mathbb{N}$ werden gemäß der Relation $\sim$ der Äquivalenzklasse $[\{1, \ldots, n\}]$ zugeordnet, wobei $\{1, \ldots, n\}$ ein natürlicher Repräsentant derselben ist. Wir können also jeder Äquivalenzklasse einer endlichen Menge eine eineindeutige Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ zuordnen, wobei die Zahl 0 gerade die leere Menge $\varnothing$ darstellen soll.

3.5 Definition: Die Äquivalenzklasse $[M]$ bezüglich der Relation $\sim$ nennen wir die **Kardinalzahl** der Menge M.

Für endliche Mengen M erhält man so die endlichen und entsprechend für unendliche Mengen M die unendlichen Kardinalzahlen. Endliche Kardinalzahlen notieren wir durch die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$, wobei n als endliche Kardinalzahl gerade angibt, wieviele Elemente die Menge enthält. Bisher wissen wir über unendlichen Kardinalzahlen noch relativ wenig; es sei jedoch festgehalten, dass wir mit den Symbolen $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ die unendlichen Kardinalzahlen bezeichnen.

Im nächsten Abschnitt werden wir die kleinste unendliche Kardinalzahl $\aleph_0$ besser kennenlernen.

3.3 Abbzählbar unendliche Mengen

Kehren wir zurück zu den abzählbar unendlichen Mengen: eine Menge M ist genau dann abzählbar, wenn es eine bijektive Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen nach M gibt. Betrachten wir nun die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ und überlegen uns, ob diese Menge abzählbar ist:

Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, da wir $\mathbb{Z}$ in der Form

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\} \tag{.1}$$

duchnummerieren können. Der Nummerierung aus (1) folgend gelangt man zur Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{Z} & \text{definiert durch} \\ k &\mapsto \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{k+1}{2} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass auch die Menge $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} | \ n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ aller rationalen Zahlen abzählbar unendlich ist. Dazu zeigen wir zuerst, dass $\mathbb{Q}_+$ die Menge aller positiven rationalen Zahlen abzählbar ist – ist dies erledigt, dann ist es evident (wie bei den ganzen Zahlen) nachzuweisen, dass auch ganz $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Üblicherweise verwendet man das Diagonalargument von Cantor, siehe nächste Abbildung, um nachzuweisen, dass $\mathbb{Q}_+$ tatsächlich abzählbar ist. Die sich daraus ergebenede Abbildung nennt man zu Ehren Cantors die Cantorsche Paarungsfunktion.

Man beachte, dass (unendlich) viele Duplikate in Abbildung .1 auftauchen, so z.B. in der Diagonalen $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots$. Ferner sind in *jeder* Zeile und in jeder Spalte unendlich viele Elemente enthalten, deshalb kann man das Diagonalargument auch wie folgt interpretieren:

3.6 Lemma: Jede Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen M_k ist wieder abzählbar.

Beweis. Man setze $M_k := \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots\}$ und identifiziere die k-te Zeile in Abbildung .1 mit der Menge M_k. Dann können wir die Vereinigung in der Form

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = \{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots\}$$

schreiben, also abzählen. □

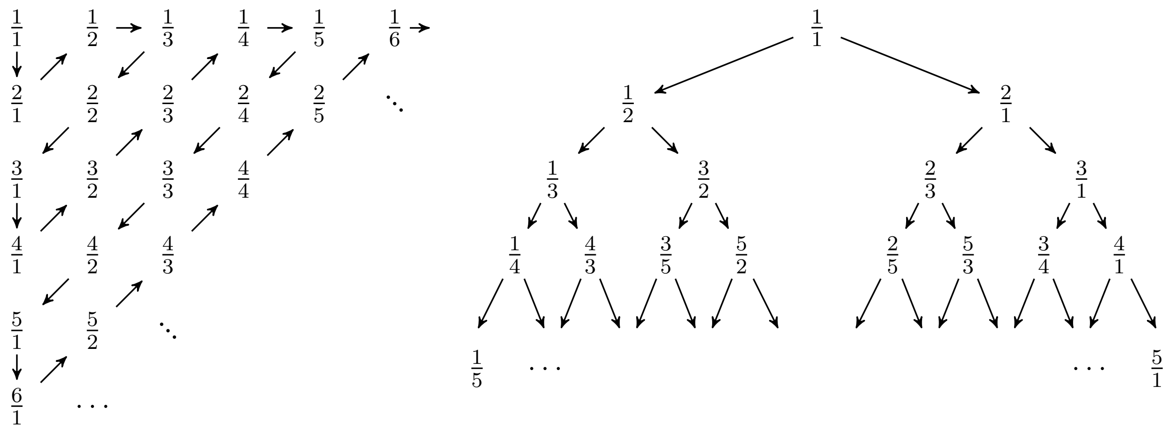

Abb. .1: *Links, das Diagonalargument von Cantor und rechts ein binärer Baum B mit unendlich vielen Knoten.*

Eine zum Vergleich mit dem Diagonalargument von Cantor elegantere Methode, alle rationalen Zahlen abzuzählen, ist in Abbildung .1 rechts skizziert. Die Idee wurde erst im Jahr 1999 von N. CALKIN und H. WILF entdeckt (siehe z.B. [3]). Hier wird anstelle einer „unendlichen Matrix“ ein binärer Baum B, mit Wurzel $1 = \frac{1}{1}$ und unendliche vielen Knoten für die Aufzählung verwendet. Ein Knoten von B soll einen Bruch enthalten und mit diesem Wert identifiziert werden – das dies legitim ist, werden wir im nächsten Lemma zeigen. Die Söhne von B ergeben sich rekursiv aus dessen Vaterknoten durch

$$\begin{tikzcd} & \frac{i}{j} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{i}{i+j} & & \frac{i+j}{j} \end{tikzcd} \tag{.2}$$

wobei $\frac{i}{j}$ ein Vaterknoten des Binärbaumes B und $\frac{i}{i+j}$ der linke bzw. $\frac{i+j}{j}$ der rechte Sohn desselben ist. Liest man die Werte des Baumes Zeile für Zeile, wobei wir in der Wurzel beginnen, und von links nach rechts, so ergibt sich daraus eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die ersten Folgenglieder von (a_n) sind

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \dots \; .$$

Der Baum B besitzt ganz außerordentliche Eigenschaften:

3.7 Lemma: Es sei B der vollständige und unendliche Binärbaum mit Wurzel $\frac{1}{1}$, dessen Knoten sich rekursiv aus (2) ergeben. Dann besitzt B dei folgenden Eigenschaften:

(i) Alle Brüche (d.h. alle Knoten) in B sind reduziert, d.h. wenn $\frac{i}{j}$ auftritt, dann sind i und j teilerfremd.

(ii) Jeder positive reduzierte Bruch $\frac{i}{j} > 0$ tritt genau einmal im Baum auf.

(iii) Jeder reduzierte Bruch tritt genau einmal auf.

(iv) Der Nenner des n-ten Bruches aus (a_n) entspricht dem Zähler des $(n+1)$-sten.

Beweis. Ad (i): Aus der Elementaren Zahlentheorie ist bekannt, dass aus $ggT(i,j) = 1$ folgt $ggT(i+j,j) = ggT(i,i+j) = 1$. Damit ist aufgrund der Definition des Baumes B und (2) bereits alles bewiesen.

Ad (ii): Es sind i,j natürliche Zahlen, d.h. es gilt für die Summe $i+j \geq 2$, wobei die Identität $i = j$ genau an der Wurzel eintritt. Für alle anderen Brüche $\frac{i}{j}$ mit $i \neq j$ steht die Summe stellvertretend für genau zwei Knoten des Baumes B, da die Addition kommutativ ist. Mit Hilfe der Ungleichung $i > j$ bzw. $i < j$ können wir diese beiden Fälle jedoch auseinander halten. Es ist also hinreichend nachzuweisen, dass die durch sämtliche Summen $i+j$ induzierten Brüche $\frac{i}{j}$ tatsächlich in dem Baum B enthalten sind. Das zeigen wir durch Induktion nach der Summe $i+j$.

Der Induktionsanfang ist klar, da $1+1 = 2$ genau für die Wurzel $\frac{1}{1}$ auftritt. Es gelte nun die erweiterte Induktionsvoraussetzung für natürliche $r-1, s-1 > 2$. Wir müssen nachweisen, dass beide Knoten $\frac{r}{s}$ mit $r < s$ und $r > s$ im Baum B enthalten sind. Ist $r < s$, dann liegt aufgrund der erweiterten Induktionsvoraussetzung $\frac{r}{s-r}$ im Baum B. Der Knoten $\frac{r}{s-r}$ enthält nach (2) den linken Sohn $\frac{r}{s-r+r} = \frac{r}{s}$. Ananlog folgt für den Fall $r > s$, dass der Knoten $\frac{r-s}{s}$ im Baum B enthalten sein muss und dieser Knoten enthält $\frac{r-s+s}{s}$ als rechten Sohn. Wir haben also den Induktionsschritt bewiesen und somit folgt die Behauptung.

Ad (iii): Wenn $\frac{r}{s}$ öfter als einmal auftreten würde, dann wären Zähler und Nenner verschieden, d.h. es würde $r \neq s$ gelten, da jeder Knoten im Baum B (außer der Wurzel) die Form

- $\frac{i}{i+j} < 0$ oder
- $\frac{i}{i+j} > 0$

besitzt. Wir dürfen also o.B.d.A. $r < s$ oder $r > s$ voraussetzen, doch dann können wir das Induktionsargument aus (ii) anwenden. Widerspruch, d.h. es gibt nur jeweils ein Knoten $\frac{r}{s}$ im Baum B.

Ad (iv): Die Brüche des linken „äußersten Astes“ von B besitzen im Zähler stets eine 1, da sich diese durch (2) als linker Sohn aus der Wurzel bestimmen. Entsprechend sind die Nenner des rechten „äußersten Astes“ von B ebenfalls mit einer 1 belegt. Der Anschluss bei einem Zeilenwechsel ist also gewahrt.

Es sei nun $\frac{i}{j}$ ein innerer Knoten und $\frac{i'}{j'}$ dessen rechts daneben liegender Knoten (also das darauffolgende Folgenglied). Wir beweisen mit Hilfe der Induktion nach $i+j$, wobei der Induktionsanfang wegen dem bereits Gesagtem zu (iv) klar ist. Es gelte nun die erweiterte Induktionsvoraussetzung für alle Brüche $\frac{i}{j}$ mit $i \leq r-1$ und $j \leq s-1$. Wir müssen nun zeigen, dass $\frac{r}{s}$ und dessen dirkten Nachfolger $\frac{r'}{s'}$ in der Folge (a_n) die Behauptung erfüllen. Der Knoten mit Bruch $\frac{r}{s}$ ist der rechte Sohn von $\frac{r-s}{s}$ und $\frac{r'}{s'}$ der linke Sohn von $\frac{r'}{r'-s'}$. Gemäß Induktionsannahme ist der Nenner von $\frac{r-s}{s}$ identisch mit dem Zähler von $\frac{r'}{r'-s'}$, d.h. es gilt $r' = s$, was zu zeigen war. Der Induktionsschritt ist also bewiesen und es folgt die Behauptung. □

Es sei nun $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, definiert durch die Zähler der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. die ersten Folgenglieder von (b_n) sind

$$1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, \dots \ .$$

Es gilt also $a_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aufgrund von Lemma 3.7, (iv). Eine natürliche Frage ist, ob man die Folge (b_n) (und damit auch (a_n)) deuten kann?

Da wir uns in einem Binärbaum B befinden, sind $a_{2n+1} = \frac{b_{2n+1}}{b_{2n+2}}$ und $a_{2n+2} = \frac{b_{2n+2}}{b_{2n+3}}$ die Söhne des Knotens $a_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$. Um dies nachvollziehen zu können betrachte man die Binärdarstellung der Indizes von (a_n) und deute die Multiplikation mit 2 im Binärsystem als einen „Verschiebung nach links“ (Shift). Mit Hilfe von (2) erhalten wir also die Identitäten

$$b_n = b_{2n+1} \quad \text{und} \quad b_{n+1} = b_{2n+2} - b_n. \tag{.3}$$

Da wir die ersten Werte der Folge (b_n) bereits kennen ist damit die Folge eindeutig durch eine Rekursionvorschrift bestimmt.

3.8 Definition: Eine **Hyperbinärdarstellung** einer natürlichen Zahl n ist eine Darstellung als Summe von Zweierpotenzen, wobei jede Potenz 2^i mit $i \in \mathbb{N}_0$ in dieser Darstellung höchstens *zweimal* verwendet werden darf. Sei weiter $h(n)$ die **Anzahl** der möglichen Hyperbinärdarstellungen der Zahl n.

Das eine Hyperbinärdarstellung einer natürlichen Zahl existiert ist klar, denn die Binärdarstellung ist offensichtlich ein Spezialfall der Hyperbinärdarstellung. Man kann zeigen, dass $h(n)$ gerade den Rekursionsvorschriften aus (3) genügt es also $h(n) = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3.4 Überabzählbare Mengen

In diesem Abschnitt studieren wir die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und weisen nach, dass diese unendliche Menge nicht abzählbar und damit nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Gemäß Definition 3.3 nennen wir solche Mengen überabzählbar.

3.9 Satz: Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis. Natürlich ist jede Teilmenge einer abzählbaren Menge selbst abzählbar. Wenn wir also eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ finden, die nicht abzählbar ist, dann ist auch $\mathbb{R}$ a fortiori nicht abzählbar. Wir betrachten das linksoffene Intervall $]0,1] \subset \mathbb{R}$ aller positiven reellen Zahlen $0 < r \leq 1$ und zeigen durch Widerspruch, dass $]0,1]$ nicht abzählbar ist. Wir nehmen also an, dass $]0,1]$ abzählbar ist, d.h., es existiert eine Auflistung $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ aller Elemente von $]0,1]$. Wir schreiben nun r_n als die eindeutige nichtendende Dezimalentwicklung, d.h.

$$r_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$$

mit $a_{ni} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ für alle n und i besitzt keine unendliche Folge von Nullen am Ende der Folge. So ist z.B. die Zahl 1 identisch mit der Dezimalentwicklung $0,9999\dots$, denn es gilt $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{10}^n\right) = 1$. Daran sieht man im übrigen, dass die Dezimalbruchentwicklung nicht eindeutig ist! Betrachten wir nun das unendliche Schema

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0, \underline{a_{11}} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots \\
r_2 &= 0, a_{21} \underline{a_{22}} a_{23} \dots a_{2n} \dots \\
r_3 &= 0, a_{31} a_{32} \underline{a_{33}} \dots a_{3n} \dots \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
r_n &= 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots \underline{a_{nn}} \dots \\
&\vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Für jeden Index n wählen wir $b_n \in \{1, 2, \dots, 9\}$ verschieden von a_{nn}. Dann ist

$$0 < b := 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots \leq 1$$

eine reelle Zahl der Menge $]0, 1]$. Gemäß Annahme existiert daher ein Index k mit $b = r_k$, was allerdings nicht sein kann, da sich die Ziffer b_k von der k-ter Ziffer a_{kk} gemäß Definition von b_k unterscheidet. Widerspruch $\lightning$. $\square$

Wir haben eben nachgewiesen, dass das Intervall $]0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$ und damit auch $\mathbb{R}$ selbst nicht abzählbar ist. Die Idee des gezeigten Beweises stammt von Cantor und wird auch zweites Diagonalargument (von Cantor) genannt. Erstaunlich ist vor allem, dass man obiges Argument ebenso auf ein beliebig kleines nicht leeres Intervall mit unterschiedlichen Grenzen angewendet werden kann.

Ferner besitzen die Intervalle $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ bzw. $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}; a < b$ allesamt dieselbe Mächtigkeit $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$, welche auch als **Kontinuum** bezeichnet wird. Zunächst zeigen wir, dass das offene Intervall $]0, 1[$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abgebildet werden kann.

3.10 Lemma: Das halboffene Intervall $[0, 1[$ der reellen Zahlen besitzt dieselbe Kardinalzahl wie das geschlossene Intervall $[0, 1]$.

Beweis. Ziel ist es eine bijektive Abbildung $[0, 1] \to [0, 1[$ anzugeben und damit zu zeigen, dass beide Mengen dieselbe Mächtigkeit besitzen. Man betrachte die abzählbar unendliche Teilmenge $M := \{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\} \subsetneq [0, 1]$. Wir verschieden $\frac{1}{1}$ auf das zweite Element $\frac{1}{2}$, entsprechend verschieben wir $\frac{1}{2}$ auf $\frac{1}{3}$ und so fort. Dadurch bilden wir die Mengen $\{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\}$ und $\{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ bijektiv aufeinander ab (siehe auch Abschnitt 3.2, Hotel von Hilbert). Die restlichen Werte $[0, 1] \setminus M$ halten wir fest. Insgesamt erhalten wir dadurch eine bijektive Abbildung $[0, 1] \to [0, 1[$, wie verlangt. $\square$

Ganz analog lässt sich zeigen, dass es für die Kardinalzahl eines Intervalls mit festen Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ keine Rolle spielt, ob dieses geschlossen, offen oder halboffen ist. Man kann stets dazu eine unendlich abzählbare Teilmenge finden und die Elemente dieser „bijektiv verschieben". Verschieben wir Intervalle innerhalb von $\mathbb{R}$ bzw. des Kontinuums, so wirkt sich diese invariant gegenüber der Mächtigkeit des Intervalls aus, da die Translation eine bijektive Abbildung ist.

Betrachten wir nun Intervalle der Art $]-a,a[$ mit positivem $a \in \mathbb{R}$ (d.h. $a > 0$) sowie die Abbildung $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \frac{x}{a-|x|}.$$

Die Funktion f ist bijektiv und in Abb. .2 skizziert. Am einfachsten zeigt man die Bijektivität von f durch Angabe einer Umkehrfunktion, für positives $0 \leq x < a$ ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned} y &:= \frac{x}{a-x} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y(a-x) && \Leftrightarrow \quad x + yx = ya \\ &\Leftrightarrow \quad x \cdot (y+1) = ya && \Leftrightarrow \quad x = \frac{ay}{1+y}. \end{aligned}$$

Das Intervall $]-a,a[$ besitzt also dieselbe Mächtigkeit, wie das Kontinuum $\mathbb{R}$.

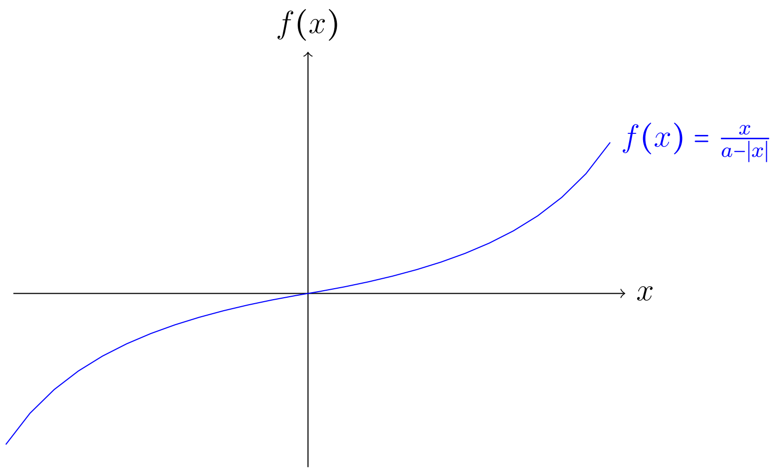

Abb. .2: *Bijektive Funktion zwischem offenen Intervall und dem Kontinuum*

Betrachten wir nun einseitig unbeschränkte Intervalle I, wie z.B. $[0,\infty[\subset\mathbb{R}$. Zu I können wir stets ein beschränktes Intervall $J\subseteq I$ finden mit $|J|\le|I|$. So ist z.B. $[0,1]$ ein beschränktes Teilintervall von $[0,\infty[$. Wie wir wissen ist ein beschränktes Intervall mit mehr als einem Punkt gleichmächtig zu $\mathbb{R}$, d.h. es muss auch $|J|=\mathfrak{c}$ gelten. Damit haben wir gezeigt:

3.11 Lemma: Jedes echte Intervall I in $\mathbb{R}$ besitzt dieselbe Kardinalzahl wie $\mathbb{R}$, d.h. es gilt $|I|=\mathfrak{c}$.

Der nächste Satz ist ein erstaunliches Ergebnis, welches der intuitiven Vorstellung der Dimension zu widersprechen scheint. Es besagt, dass die reelle zweidimensionale Ebene $\mathbb{R}^2$ bijektiv auf die eindimensionale Gerade $\mathbb{R}$ abgebildet werden kann. Der Beweis dieses Satzes ist genial und einfach zugleich.

3.12 Satz: Die Menge $\mathbb{R}^2$ aller geordneter Paare von reellen Zahlen (die reelle Ebene) hat dieselbe Größe wie $\mathbb{R}$.

Beweis. Es ist hinreichend zu zeigen, dass die Menge aller reellen Zahlenpaare $\{(x,y)|\,0<x,y\le 1\}$ bijektiv auf das Intervall $]0,1]$ abgebildet werden kann. Sei nun (a,b) ein beliebiges Intervall und betrachten wir sodann deren unendliche und daher eindeutige Deziamldarstellung. Exemplarisch seien

$$\begin{aligned} a &= 0,50531065006\ldots \\ b &= 0,000350654054\ldots\ . \end{aligned}$$

Man beachte, dass keine der beiden Nachkomma-Zahlenfolgen unendlich viele Nullen besitzt, da Zahlen wie z.B. $0,5000\ldots$ als $0,4999999\ldots$ –eben in der unendlichen Dezimaldarstellung– notiert werden.

Die Ziffern von a und b zerlegen wir, wie folgt beschrieben, in Sequenzen:
Durchlaufe die Folge der Nachkommaziffern beginnend von links nach rechts und füge dabei die aktuelle Ziffer einer Sequenz hinzu, bis wir auf eine Ziffer ungleich Null stoßen. Die letzte Ziffer einer solchen Sequenz ist also stets eine Zahl ungleich Null und damit können Nullen nur zu Beginn einer Sequenz stehen. Im Anschluss entferne die eben gebildete Sequenz aus der Ausgangsfolge und beginnen von vorne. Durch Iteration dieses Vorgangs zerlegen wir die beide Zahlen a,b in unendlich viele endliche Sequenzen $S_1(a),S_2(a),\ldots$ bzw. $S_1(b),S_2(b),\ldots$.

Exemplarisch zerlegen wir die reellen Zahlen a und b:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Sequenzen von } a: & 5 & 05 & 3 & 1 & 06 & 5 & 006\ldots \\ \text{Sequenzen von } b: & 0003 & 5 & 06 & 5 & 4 & 05 & 4\ldots \end{array}$$

Als nächstes ordnen wir dem Paar reeller Zahlen (x,y) eine neue reelle Zahl $c\in]0,1]$ zu, indem wir die Sequenzen der beiden Zahlen x und y wie folgt anordnen:

$$z := 0,S_1(a)S_1(b)S_2(a)S_2(b)\ldots$$

Da die Folgen der Nachkommaziffern von x und y keine unendliche Teilfolge von Nullen enthält, ist auch z eine unendliche Dezimalentwicklung für eine reelle Zahl des Intervalls $]0,1]$.Für unser Beispiel erhalten wir

$$0,500030553061506450500 64\ldots$$

und diese Zahl liegt offensichtlich im Intervall $]0,1]$. Umgekehrt können wir aus der Entwicklung von z sofort die beiden Ausgangszahlen x und y auslesen, d.h. wir haben eine bijektive Abbildung gefunden. $\square$

Eine einfache und dennoch wichtige Folgerung aus dem letzten Satz ist, dass durch bijektive Abbildungen im Allgemeinen die Dimension *nicht* erhalten bleibt. Die Bijektion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ bestimmt durch $(x,y) \mapsto x+iy$ zeigt, dass damit auch die Mächtigkeit der Menge der komplexen Zahlen bestimmt ist, denn es gilt offensichtlich

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}| = \mathfrak{c}.$$

Mittels vollständiger Induktion kann man nachweisen, dass $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ für ein beliebiges natürliches n gilt.

3.5 „Größer“ und „Kleiner“ bei Mächtigkeiten

In Abschnitt 3.3 haben wir nachgewiesen, dass die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ allesamt gleichmächtig sind, d.h. dieselbe Kardinalzahl besitzen und somit alle drei Mengen abzählbar unendlich viele Elemente enthalten. Da Menschen in der Realwelt keinen Umgang mit der Unendlichkeit pflegen, scheint es skurril, dass die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ im Sinne der Definiton 3.1 gleich groß sind, d.h. in derselben Äquivalenzklasse liegen und damit dieselbe Kardinalzahl besitzen.

Die Kardinalzahl von abzählbar unendlichen Mengen notieren wir mit $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$, wobei $\aleph$ der erste Buchstabe des Hebräischen Alphabets ist. Wir werden im Laufe dieses Abschnitts zeigen, dass $\aleph_0$ die „kleinste“ Form der Unendlichkeit darstellt. Dazu müssen wir jedoch zunächst charakterisieren, wann eine Kardinalzahl einer Menge „kleiner“ ist als eine andere.

Wir betrachten zunächst den endlichen Fall: es seien also zwei endliche Mengen $M = \{m_1,\ldots,m_s\}$ und $N = \{n_1,\ldots,n_t\}$ gegeben. Wir sagen, dass eine endliche Menge M **echt kleiner** ist als eine endliche Menge N, wenn $s < t$ gilt, d.h. wenn M echt weniger Elemente als N besitzt. Diese Definition ist intuitiv klar, doch wie verhält es sich wieder bei unendlichen Mengen?

Es liegt nahe, es auch hier mit Abbildungen zu versuchen. Kehren wir dazu noch einmal gedanklich zu Hilberts Hotel zurück: Es seien also die Mengen G der Gäste und die Menge Z der Zimmer gegeben (ob endlich oder unendlich). Damit wir die einzelnen Elemente der Menge miteinander vergleichen können, darf höchstens ein Gast pro Hotelzimmer logieren. In die Sprache der Abbildungen übersetzt bedeutet das die Injektivität der korrespondierende Abbildung $f: G \to Z$. D.h. wenn $f(g_i) = f(g_j)$ gilt, dann muss $g_i = g_j$ also $i = j$ gelten. Nehmen wir nun an, dass die Gästeanzahl (z.B. im endlichen

Fall) $|G|$ echt kleiner ist als die Anzahl der Zimmer $|Z|$, dann kann die Abbildung f niemals surjektiv sein.

Die eben betrachtete Veranschaulichung motiviert die

3.13 Definition: Seien M und N Mengen. Wir sagen, dass $|M|$ **kleiner oder gleich** $|N|$ ist, und schreiben $|M| \leq |N|$, falls es eine injektive Abbildung von M nach N gibt. Wir sagen, dass $|M|$ **kleiner** als $|N|$ ist und schreiben $|M| < |N|$, wenn es eine injektive, aber keine surjektive Abbildung von M nach N gibt.

Mit Hilfe dieser Definition und der Defnition 3.1 wird eine Totalordnung auf der Klasse aller Kardinalzahlen erklärt. Wir ziehen das Hauptergebniss dieses Abschnitts vor:

3.14 Satz (Totalordnung der Kardinalzahlen):
Seien $|M|, |N|, |O|$ Kardinalzahlen, dann gilt:

(i) Wenn $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$ gilt, dann folgt $|M| = |N|$. (Antisymmetrie)

(ii) Wenn $|M| < |N|$ und $|N| < |O|$ gilt, dann folgt $|M| < |O|$. (Transitivität)

(iii) $\forall |M|, |N|$ gilt $|M| \leq |N|$ oder $|N| \geq |M|$. (Totalität)

Die Transitivität ist klar – man betrachte das Kompposituum der beiden injektiven Funktionen, die gemäß der Definition der Relation existieren müssen, und beachte dabei, dass es gleichzeitig keine entsprechenden Surjektionen geben kann. Die Aussage (iii) wird in der Literatur oft auch Vergleichbarkeitssatz von Mengen genannt und beantwortet die Frage positiv, ob je zwei beliebige Mengen in ihrer Mächtigkeit vergleichbar sind. Der erste strenge Beweis des Vergleichbarkeitssatzes geht auf Zermelo zurück. Dem Vergleichbarkeitssatz und dessen Beweis ist z.B. in [1] ein ganzer Unterabschnitt – im Rahmen einer Einführung in das Thema – gewidment.

Wir zeigen nun, dass die Antisymmetrie also Aussage (i) der Totalordnung erfüllt ist.

3.15 Satz (von Schröder & Bernstein): Wenn jede von zwei Mengen M und N injektiv in die jeweils andere abgebildet werden kann, dann existiert eine Bijektion von M nach N, d.h., es gilt $|M| = |N|$.

Beweis. O.B.d.A. darf man annehmen, dass M und N disjunkt sind. Ansonsten ersetzt man N durch eine disjunkte gleichmächtige Menge. Seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ zwei injektive Funktionen, die es gemäß Voraussetzung geben muss. Sei weiter $m_0 \in M$ ein beliebigem Element.

$$m_0 \overset{f}{\mapsto} n_0 \overset{g}{\mapsto} m_1 \overset{f}{\mapsto} \ldots \qquad (.4)$$

Mit Hilfe dieser beiden Abbildungen und dem „Startelement“ m_0 bilden wir eine Folge F [siehe (3)], bestehend aus alternierenden Bildern von f und g. Dies ist möglich, da die Quelle von g gleich dem Ziel von f entspricht. Wir bilden also zunächst $f(m_0)$, dann

$g(f(m_0)) = (g \circ f)(m_0)$, dann $f(g(f(m_0))) = (f \circ g \circ f)(m_0)$ und setzen diesen Prozess solange wie möglich fort.

Dabei können verschiedene Fälle auftreten:

1. Die beschriebenen Iteration wiederholt sich, da wir wieder auf m_0 stoßen, d.h. die Folge ist zyklisch.

$$\begin{tikzcd} m_0 \arrow[r, "f"] & n_0 \arrow[r, "g"] & m_1 \arrow[r, "f"] & \cdots & m_k \arrow[r, "g"] & n_k \arrow[lllll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

2. Die Iteration bricht nicht ab, d.h. die Folge enthält unendlich viele verschiedene Elemente.

$$m_0 \xrightarrow{f} n_0 \xrightarrow{g} m_1 \xrightarrow{f} \cdots$$

Man beachte, dass die Abbildung f und g injektiv sind, deshalb muss das erste mögliche „Duplikat" in der Folge m_0 sein.

Tritt der zweite Fall ein, so bilden wir eine weitere Folge F', diesmal mit den Umkehrfunktionen von f und g. Wir starten wieder mit dem gewählten Element m_0 und bilden dieses mit g^{-1} ab, sofern m_0 im Bild von g liegt. Ist $g^{-1}(m_0)$ erklärt und liegt im Bild von f, dann bilden wir $f^{-1}(g^{-1}(m_0)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(m_0)$ – diesen Prozess führen wir solange fort, wie es möglich ist.

$$m_0 \overset{g^{-1}}{\mapsto} n_{-1} \overset{f^{-1}}{\mapsto} m_{-1} \overset{g^{-1}}{\mapsto} \ldots \tag{.5}$$

Bilden wir für den zweiten Fall die zusammengesetzte Folge $F'F$, so können wir diesen Fall weiter aufgliedern in:

a) F und F' besitzen unendlich viele unterschiedliche Glieder; die Verbindung $F'F$ kann man sich also wie folgt vorstellen.

$$\cdots \xrightarrow{g^{-1}} m_0 \xrightarrow{f} n_0 \xrightarrow{g} m_1 \xrightarrow{f} \cdots$$

b) Die Folge F' bricht ab, da ein Element m von M nicht im Bild von g liegt. Dann Nummerieren wir die Folge derart um, dass m gleich m_0 ist und alle anderen Folgenglieder entsprechend der Skizze indiziert sind:

$$m_0 \xrightarrow{f} n_0 \xrightarrow{g} m_1 \xrightarrow{f} n_1 \xrightarrow{g} \cdots$$

c) Die Folge F' bricht ab, da ein Element n von N nicht im Bild von f liegt. Dann Nummerieren wir die Folge derart um, dass n gleich n_0 ist und alle anderen Folgenglieder entsprechend der Skizze indiziert sind:

$$n_0 \xrightarrow{g} m_0 \xrightarrow{f} n_1 \xrightarrow{g} m_1 \xrightarrow{f} \cdots$$

Da diese Fallunterscheidung vollständig ist, wird die Vereinigungsmenge $M \cup N$ in vier verschiedene Folgen zerlegt. Da die Abbildungen f, g injektiv sind ist auch $m_i \mapsto n_i$ injektiv und da die komplette Vereinigungsmenge $M \cup N$ in vier verschiedene Teilmengen zerlegt wird, muss $m_i \mapsto n_i$ auch surjektiv sein und damit bijektiv. □

Der eben bewiesenen Satz von SCHRÖDER & BERNSTEIN ist überaus mächtig und gewinnbringend. Möchte man z.B. nachweisen, dass die Intervalle $[0,1]$ und $[0,1[$ gleichmächtig sind, so müssen wir lediglich zwei Injektionen angeben und der Rest übernimmt der Satz. Eine Injektion ist offensichtlich, da $[0,1[\subset [0,1]$ gilt – die Injektion $[0,1[\hookrightarrow [0,1]$ definiert durch $x \mapsto x$. Die zweite Injektion ist gegeben durch $[0,1] \to [0,1[$ bestimmt durch $x \mapsto \frac{x}{2}$.

3.6 Unendliche Mächtigkeiten

Inzwischen kennen wir also die Ordnungsstruktur der Kardinalzahlen und die kleinste Kardinalzahl $\aleph_0$ einer unendlich großen Menge. Kommt noch etwas nach $\aleph_0$, d.h. gibt es eine Kardinalzahl die echt größer ist als $\aleph_0$?

Aus Abschnitt 3.4 wissen wir bereits, dass überabzählbare Mengen echt mächtiger sind als $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, der folgende Satz zeigt sogar, dass es beliebig große Kardinalzahlen und damit unendlich viele Unendlichkeiten gibt.

3.16 Satz (von CANTOR): Für jede nicht leere Menge M gilt $|M| < |\mathcal{P}(M)|$.

Beweis. Wir beweise durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass es eine bijektive Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$ gibt. Mit $m \in M$ ist $f(m)$ eine Teilmenge von M, welche m enthält oder aber auch nicht. Wir betrachten nun die Menge

$$U := \{m \in M | \; m \notin f(m)\},$$

die offensichtlich eine Teilmenge von M ist. Da die Abbildung f als bijektiv angenommen wird, muss es ein Element $u \in M$ geben mit $f(u) = U$. Sodann sind zwei Fälle möglich:

1. Fall Ist $u \in U$, dann erfüllt u die definierende Eigenschaft der Menge U, d.h. es gilt $u \notin f(u) = U$, was im Widerspruch zu $u \in U$ steht. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

2. Fall Gilt dagegen $u \notin U$, dann ist $u \notin f(u) = U$, d.h. $u \in U$, was wieder einen Widerspruch erzeugt.

Da alle möglichen Fälle zu Widersprüchen führen, kann es keine bijektive Abbildung von M nach $\mathcal{P}(M)$ geben. □

Wie bereits angesprochen impliziert dieser Satz, dass es unendlich viele unendliche Kardinalzahlen gibt, denn es gilt:

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}_0| < \aleph_1 := |\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)| < \aleph_2 := |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_0))| < \dots$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen einfachen Lemmata über unendliche Mengen.

3.17 Lemma: Seien M und N Mengen gleicher Mächtigkeit, dann gilt: Ist M unendlich, so auch N.

Beweis. Da die Menge M unendlich ist, existiert eine Bijektion $f : M \to M'$ in eine echte Teilmenge $M' \subsetneq M$. Da ferner M und N gleichmächtig sind, existiert eine Bijektion $g : M \to N$. Das Kompositum

$$h : g \circ f \circ g^{-1} : N \to N,$$

ist injektiv, da g^{-1}, f und g injektiv sind. Allerdings ist h nicht surjektiv, da für $x \in M \setminus M'$ das Bild $g(x)$ nicht im Bild von h liegt. Betrachten wir also die Funktion $h' : N \to \text{Bild}(h)$, dann haben wir eine bijektive Funktion von N in eine echte Teilmenge $\text{Bild}(h) \subsetneq N$ gefunden. □

Das eine Bijektion die Unendlichkeit einer Menge erhält, ist nicht sehr überraschend. Das nächste Lemma zeigt die Übertragung einer unendlichen Menge auf jede Obermenge.

3.18 Lemma: Seien M und N Mengen mit $M \subseteq N$, dann gilt: Ist M unendlich, so auch N.

Beweis. Da die Menge M unendlich ist, existiert eine Bijektion $f : M \to M'$ in eine echte Teilmenge $M' \subsetneq M$. Sei dann die Funktion $g : N \to N$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in N \setminus M \\ f(x) & \text{für } x \in M \end{cases}.$$

Die Funktion g ist injektiv, da sie sich aus injektiven Funktionen zusammensetzt. Da $\text{Bild}(f) = M' \subsetneq M$ gilt, trifft die Funktion g kein Element aus $M \setminus M'$ – die Funktion g ist also nicht surjektiv. Betrachten wir $g' : N \to \text{Bild}(g)$, so haben wir eine bijektive Funktion in eine echte Teilmenge von N gefunden. □

3.19 Folgerung: Seien M und N Mengen mit $|M| \leq |N|$, dann gilt: Ist M unendlich, so auch N.

Beweis. Da $|M| \leq |N|$ existiert in jedem Fall eine injektive Funktion $f : M \to N$. Sei $N' := \text{Bild}(f)$, dann besitzt N' dieselbe Kardinalzahl wie M, da die Restriktion von f auf das Bild bijektiv ist. Da $N' \subseteq N$ gilt, folgt mit dem letzten Lemma die Behauptung. □

Entfernt man endlich viele Elemente aus einer unendlichen Menge, dann ist die sich daraus ergebende Menge immer noch unendlich. Der folgende Satz beinhaltet sehr gewinnbringende Argumente, welche u.a. in der Analysis, der Topologie oder der Wahrscheinlichkeitstheorie Anwendung finden.

3.20 Satz:

(i) Seien M eine unendliche Menge, $x \in M$ und $N := M \setminus \{x\}$. Dann ist auch N unendlich.

(ii) Seien M eine endliche Menge und x ein beliebiges Objekt. Dann ist auch $N := M \cup \{x\}$ endlich.

Beweis. Ad (i): Da die Menge M unendlich ist, existiert eine Bijektion $f : M \to M'$ in eine echte Teilmenge $M' \subsetneq M$. Sei $y \in M \setminus M' \neq \varnothing$. Beschränken wir den Definitionsbereich der Abbildung f auf $M \setminus \{y\}$, so erhalten wir die injektive Restriktion

$$f_{|M\setminus\{y\}} : M \setminus \{y\} \to M' \setminus \{f(y)\},$$

wobei $f(y) \neq y$, da $\mathrm{Bild}(f) = M'$. Also ist

$$g : M \setminus \{y\} \to M' \setminus \{f(y)\}$$

ebenfalls injektiv und somit existiert eine bijektive Funktion in eine Teilmenge von $M \setminus \{y\}$. Da offensichtlich $|M \setminus \{y\}| = |M \setminus \{x\}|$ gilt, folgt die Behauptung.

Ad (ii): Angenommen die Behauptung stimmt nicht, d.h. N ist unendlich und $x \notin M$. Nach (i) ist dann auch $N \setminus \{x\} = M$ unendlich, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. □

Wendet man (ii) des letzten Satzes iterativ an, so folgt unmittelbar, dass $M \cup \{x_1, \ldots, x_k\}$ (mit $k \in \mathbb{N}$) endlich ist, falls M endlich ist. Entsprechend folgt aus (i) durch iterative Anwendung, dass man endlich viele Elemente aus einer unendlichen Menge entfernen kann, so dass die Ergebnismenge immer noch unendlich ist.

4 Von Ordinalzahlen

Im ersten Teilabschnitt werden wir die aus der Zahlentheorie wohlbekannte Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mengentheoretisch fundieren, d.h. nur mit Hilfe der Axiome ZFC entwickeln, und diese darüber hinaus auf ihre Ordnung hin studieren.

4.1 Natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen bilden die Grundlage unseres gesamten Zahlsystems; so können die rationalen aus den natürlichen Zahlen, die reelen aus den rationalen Zahlen und schließlich die komplexen aus den reellen Zahlen entwickelt werden. Grundlage all dieser Zahlsysteme ist ein simple und dennoch geniale Idee von Georg Cantor, den natürlichen Zählprozess des „Eins hinzufügen", um einen Limesschritt bis über die abzählbare Unendlichkeit hinaus, zu erweitern. Der Satz 3.16 zeigt, dass dies möglich ist!

In die Sprache der Mengenlehre übersetzt bedeutet „Eins hinzufügen", die gegebene Menge um ein weiteres Element ergänzen.

4.1 Definition: Ein **Nachfolger** x^+ von x sei definiert durch $x^+ := \{x, \{x\}\} = x \cup \{x\}$, d.h. als diejnige Menge, die sich selbst und die Menge von sich selbst enthält. Eine Menge M heißt **Nachfolgermenge**, wenn die beiden Eigenschaften

(i) $\varnothing$ ist ein Element von M,

(ii) $x \in M \quad \Rightarrow \quad x^+ \in M.$

Eine Nachfolgermenge enthält also stets die leere Menge $\varnothing$ und mit jedem Element x auch dessen Nachfolger x^+. Das impliziert, dass eine Nachfolgermenge mindestens (abzählbar) unedlich viele Elemente enthält. Dass eine derartige Menge tatsächlich konstruiert werden kann, ist aufgrund des Unendlichkeitsaxiom und der Forderung nach der Existenz der leeren Menge des Axiomsystems ZFC (siehe Teilabschnitt 2.2) klar.

Als nächstes werden wir eine bedeutende Nachfolgermenge konstruieren, die wir **natürlichen Zahlen** nennen und mit ω bezeichnen. Uns allen ist wohl die zahlentheoretische Version der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ bekannt – bei der folgenden Konstruktion von ω geht es nun darum die natürlichen Zahlen einzig mit Hilfe von mengentheoretischen Grundlagen (d.h. den ZFC-Axiomen) zu erklären und damit zu fundieren.

Dazu setzen wir induktiv

$$0 := \varnothing, \quad 1 := 0^+, \quad 2 := 1^+, \quad 3 := 2^+, \quad \ldots$$

woraus wir folgende Schlüsse ziehen können:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1 = 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\} \\
&\Rightarrow 2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \\
&\Rightarrow 3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\
&\Rightarrow \ldots \\
&\Rightarrow n = (n-1)^+ = (n-1) \cup \{n-1\} = \{0, 1, \ldots, n-1\} \\
&\Rightarrow \ldots
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad \ldots \qquad \text{und somit}$$
$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{\varnothing\}, \quad 2 = \{\varnothing, \ \{\varnothing\}\ \}, \quad 3 = \{\varnothing, \ \{\varnothing\}, \ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ \}, \quad \ldots$$

Möchte man aber die kleinste Nachfolgermenge bestimmen, so ist sicherlich die Durchschnittsbildung $\bigcap \mathcal{X}$, wobei $\mathcal{X}$ als Variable für eine beliebige Nachfolgermengen stehen soll, zielführend. Der Mengendurchschnitt $\bigcap \mathcal{X}$ erfüllt offensichtlich die Bedingungen (i) und (ii) der Definition 4.1. Eine Bijektion zwischen ω und $\bigcap \mathcal{X}$ ist wegen $0 = \varnothing$ klar, d.h. ω ist bis auf Isomorphie die kleinste Nachfolgermenge. Somit ist die Menge ω in allen anderen Nachfolgermengen vollständig enthalten! Das *Prinzip der vollständigen Induktion* ist eine Umformulierung der Tatsache, dass die einzige in ω enthaltene Nachfolgermenge ω selbst ist.

Die Konstruktion der natürlichen Zahlen ω liefert darüber hinaus noch eine ordnungstreuen Bijektion zwischen $(\mathbb{N}_0, <)$ und $(\omega, \in)$, wodurch die Ähnlichkeit zwischen der zahlen- und mengentheoretischen Interpretation der natürlichen Zahlen unterstrichen wird.

Wir halten die Ergebnisse in der folgenden Definition fest:

4.2 Definition: Die gemäß der Inklusion kleinste Nachfolgermenge ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\omega := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Die Elemente von ω heißen **natürliche Zahlen**.

Als nächstes werden wir nachweisen, dass ω zusammen mit der Inklusion eine total geordnete Menge ist.

4.3 Lemma: Jedes Element einer natürlichen Zahl n ist auch eine echte Teilmenge von n, d.h. aus $x \in n$ folgt $x \subset n$. Insbesondere ist keine natürliche Zahl ein Element von sich selbst, d.h. $n \notin n$.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion: Für $n = 0 = \varnothing$ ist die Behauptung klar, da 0 keine Elemente enthält. Es gelte nun die erweiterte Induktionsvoraussetzung für ein $n \in \omega$. Gemäß Definition ist $n + 1 = n^+ = \{n, \{n\}\}$, d.h. aus $x \in n^+$ folgt $x = n$ oder $x \in n$, in jedem Fall also $x \subseteq n \subseteq n^+ = n + 1$.

Wäre n^+ ein Element von n^+, so folgte $n^+ \in n$ oder $n^+ = n$, wobei die ersten Annahme zu $n^+ \subseteq n \subseteq n^+$, also gleichfalls zu $n^+ = n$ führt. Das widerspricht jedoch der Induktionsannahme $n \notin n$. □

4.4 Folgerung: Für zwei natürliche Zahlen m, n sind die Bedingungen $m \in n$ und $m \subset n$ äquivalent.

Beweis. Ist $m \in n$, dann folgt mit Lemma 4.3 die Behauptung $m \subseteq n$. Es bleibt also nur noch die Rückrichtung zu zeigen, wieder mit vollständiger Induktion. Dazu sei $m \subset n$. Für $n = 0 = \varnothing$ ist die Behauptung klar, da die leere Menge keine echte Teilmenge besitzt, d.h. es gilt der Induktionsanfang. Sei nun die Implikation $m \subset n \Rightarrow m \in n$ für ein $n \in \omega$ richtig. Für $m \subset n^+$ betrachten wir nun zwei Fälle:

- Ist $n \in m$, dann folgt $n \subset m \subset n^+$ mit Lemma 4.3, was nicht geht, da n^+ nur ein Element mehr als n enthält.
- Ist dagegen $n \notin m$, dann ist entweder $m = n \in n^+$ oder es ist $m \subset n$ und die Induktionsvoraussetzung liefert $m \in n \subset n^+$.

□

4.5 Definition: Eine Menge M heißt **transitiv**, wenn *jedes* Element von M auch gleichzeitig eine Teilmenge von M ist.

Wegen Lemma 4.3 ist die Menge der natürlichen Zahlen eine transitive Menge. Die natürlichen Zahlen bilden zusammen mit $\in$ bzw. $\subset$ eine Totalordnung, d.h. $(\omega, \subseteq)$ ist eine Partialordnung und eine beliebige natürliche Zahl kann mit jeder anderen natürlichen Zahl verglichen werden.

4.6 Satz: Für drei beliebige natürliche Zahlen k, m, n gilt:

(i) $k \subseteq m$ und $m \subseteq n \Rightarrow k \subseteq n$ (Transitivität)

(ii) $m \subseteq n$ und $n \subseteq m \Rightarrow m = n$ (Antisymmetrie)

(iii) $m \subseteq n$ oder $n \subseteq m$ (Totalität)

Die Bedingung (ii) und (iii) kann man zusammenfassen zu der Forderung (Konnexität):

(iv) Es gilt genau eine der drei Bedingungen $m \subsetneq n$, $n \subsetneq m$, $m = n$.

Beweis. Ad (i) und (ii): Da es sich bei der Ordnungsrelation um die Inklusion handelt sind beide Aussagen offensichtlich richtig.

Ad (iii): Wir zeigen mit Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Behauptung klar, da $0 = 0$ gilt. Sei nun (iii) für ein festes aber beliebiges natürliches n korrekt, so dass für jedes $m \in \omega$ gilt:

1. $m \subseteq n$ oder
2. $n \subseteq m$.

Im ersten Fall $m \subseteq n$ folgt $m \subseteq n^+ = n+1$, bleibt also noch zu zeigen, dass auch im zweiten Fall die entsprechende Inklusionsbedingung erfüllt ist. Gelte also nun $n \subseteq m$ und damit $n \in m$ mit Folgerung 4.4 – und somit $n^+ = n + 1 = n \cup \{n\} \subseteq m$. Damit ist (iii) auch für n^+ gezeigt und mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung. □

4.2 Wohlordnungen

4.7 Definition: Eine **Wohlordnung** einer Menge M ist eine totale Ordnung, bei der *jede* nicht leere Teilmenge von M ein kleinstes Element bezüglich dieser Ordnung hat.

Jeder von uns kennt und verwendet mindestens eine Wohlordnung im alltäglichen Leben, denn die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit der kanonischen Ordnung (siehe ON1)

$$\{0 < 1 < 2 < 3 < \ldots\},$$

bereits erwähnt in Abschnitt 2.3, ist wohlgeordnet. Aber auch $(\varnothing, \varnothing)$ ist eine Wohlordnung mit der leeren Relation als Ordnungsstruktur.

4.8 Lemma: Jede nicht leere Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ besitzt bezüglich der Ordnung (ON1) ein kleinstes Element.

Beweis. Sei $X \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Menge *ohne* kleinstes Element, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es ein noch kleineres $x' \in X$. Wir beweisen mit Induktion, dass die Menge

$$M = \{n \in \mathbb{N}_0 | \; m \notin X \text{ für alle } m \in \{0, 1, \ldots, n\} \; \} = \mathbb{N}_0 \setminus X$$

ganz $\mathbb{N}_0$ umfasst, so dass X nur die leere Menge sein kann. Offensichtlich kann die Zahl 0 nicht zu X gehören, da keine natürliche Zahl kleiner ist als 0, d.h. es gilt $0 \in M$. Sei nun n eine natürliche Zahl mit $m \notin X$ für alle $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, d.h. $n \in M$. Dann kann auch $(n+1)$ nicht zu X gehören, denn anderenfalls hätten wir ein kleinstes Element von X gefunden. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt also für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass $n \notin X$ und damit $M = \mathbb{N}_0$ bzw. $X = \varnothing$. □

Aus dem alltäglichen Gebrauch der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ ist uns insbesondere die Ordnung (ON1) vertraut. Davon abgesehen kann man abweichende Ordnungen auf $\mathbb{N}_0$ erklären, wie z.B.

$$0 < 2 < 4 < 6 < \ldots < 1 < 3 < 5 < 7 < \ldots \;. \tag{ON2}$$

Jede gerade Zahl (inklusive der Null) ist echt kleiner als jede ungerade Zahl, wobei die Ordnungen innerhalb der geraden oder ungeraden Zahlen der von (ON1) entspricht. Man könnte aber auch auf die Idee kommen, die kanonische Ordnung (ON1) der natürlichen Zahlen umzukehren, dann gilt

$$\ldots < 4 < 3 < 2 < 1 < 0, \tag{ON3}$$

wobei dann 0 das größte Element von $\mathbb{N}_0$ ist.

Die Ordnungen (ON1) und (ON2) sind wohlgeordnet, da jede nicht leere Teilmenge ein kleinstes Element enthalten muss. Die Ordnung (ON3) ist dagegen nicht wohlgeordnet, da z.B. die Menge $\{n \in \mathbb{N}_0 |\; n <_{(ON3)} 2\}$ kein kleistes Element enthält bzw. eine unendliche absteigende Kette mit sich nicht wiederholenden Elementen ist.

Es sei konstatiert, dass die Wohlordnung einer Menge X impliziert, dass es *keine* unendlich lange absteigende Kette gibt. Liegt also eine unendliche Kette $\{x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots\}$ einer wohlgeordneten Menge $(X, <)$ vor, dann muss es ein $n \in \mathbb{N}_0$ geben, so dass $x_n = x_k$ für alle $k > n$ erfüllt ist, d.h. stationär wird. Man sagt auch, dass eine wohlgeordnete Menge die **absteigende Kettenbedingung** (DCC) erfüllt. Findet man hingegen in einer Totalordnung eine unendliche absteigende Kette, die nicht stationär wird, dann ist diese Totalordnung nicht wohlgeordnet.

Vergleicht man die Ordnungen (ON1) und (ON2) miteinander, so kann man feststellen, dass die Ordnung (ON1) nur einen Wert (nämlich die 0) und (ON2) dagegen zwei Werte (nämlich die 0 und die 2) ohne bestimmbaren Vorgänger besitzt; beide Ordnungen sind also nicht ähnlich zueinander.

4.9 Beispiel: a) Jede endliche Kette im Sinne von Definition 2.3 ist wohlgeordnet.

b) Die gewöhnliche <-Ordnung ist weder auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ noch auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ wohlgeordnet. So besitzen z.B. die Menge $\{2k |\; k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$ und $]0, 1] \subset \mathbb{R}$ keine kleinsten Elemente. Aber auch das Einheitsintervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ kann mit der gewöhnlichen <-Ordnung nicht wohlgeordnet werden und das obwohl die Gesamtmenge ein kleinstes Element besitzt.

Ein wichtiger Satz in diesem Kontext ist der

4.10 Satz (Wohlordnungssatz von Zermelo): Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

Dieser Satz ist –neben vielen weiteren– äquivalent zum Auswahlaxiom und impliziert u.a., dass die Mengen $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$ wohlgeordnet werden können. Für die Menge $\mathbb{Z}$ ist dies auch kein Problem, da man bspw. $0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < \ldots$ als Ordnung angeben kann, doch für die reellen Zahlen konnte bis heute noch kein Wohlordnung konstruiert bzw. gefunden werden.

4.11 Definition: Seien $(M, <_M)$ und $(N, <_N)$ zwei wohlgeordnete Mengen. Dann heißen M und N **ordnungsisomorph**, falls eine Bijektion $\phi : M \to N$ existiert, die die Ordnung respektiert, d.h. für $m, m' \in M$ gilt

$$m <_M m' \quad \Leftrightarrow \quad \phi(m) <_N \phi(m').$$

Die Bijektion ϕ nennt man auch **ordnungstreue Abbildung** und die beiden Mengen M und N heißen **gleichgeordnet**. Wir notieren ordnungsisomorphe Wohlordnungen kurz durch $(M, <_M) \cong (N, <_N)$ und nennen diese **ähnlich** oder **gleichlang**.

Die Wohlordnungen $(\mathbb{N}_0, <)$ und $(\omega, \in)$ sind ähnlich (siehe letzter Abschnitt) und damit gleichlang, d.h. man kann das Ergebnis aus Lemma 4.8 auch für die mengentheoretische Version der natürlichen Zahlen interpretieren.

Die Bezeichnung „gleichlang“ ist sofort ersichtlich, wenn man eine Wohlordnung (z.B. die natürlichen Zahlen) graphisch darstellt:

Abb. .3: *Anschauung einer Wohlordnung*

Die Punkte sollen die Elemente der Wohlordnung repräsentieren, wobei der erste Punkt ganz links das kleinste Element der Gesamtmenge sein soll. Entsprechend der Ordnung sollen alle größeren Elemente der Menge rechts davon liegen. Betrachtet man ein beliebiges Teilstück dieses „Ordnungsstrangs“, so besitzt dieser stets ein kleinstes Element.

Ähnliche Wohlordnungen sind gleichlang, d.h. sie besitzen im Wesentlichen dieselbe Ordnung, allerdings sind die Elemente dieser Ordnungen different benannt. Die Bijektion zwischen den beiden ähnlichen Wohlordnungen „übersetzt“ dann quasi die Namen der Elemente eineindeutig.

4.12 Beispiel: Betrachten wir die wohlgeordnete Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1 < 2 < 3 < \ldots\}$ und die wohlgeordnete Menge der geraden Zahlen $G := 2\mathbb{N} := \{2 < 4 < 6 < \ldots\}$, so stellt man fest, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to G$ definiert durch $n \mapsto 2n$ ordnungstreu ist. Beide wohlgeordnete Mengen sind also ordnungsisomorph.

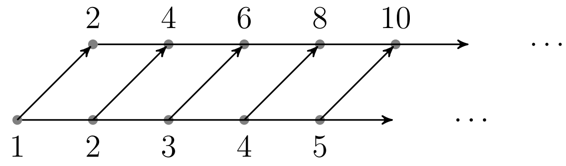

Abb. .4: *Ordnungstreue Abbildung zwischen gleichlangen Wohlordnungen*

Geht man gedanklich in einer graphisch dargestellten Wohlordnung von links nach rechts, d.h. vom Anfangselement zu immer größeren Elementen, so bemerkt man, dass der Weg determiniert ist. Man kann egal von welchem Element aus, stets zum nächst größeren Element springen. Auch diese Veranschaulichung bestätigt, dass Wohlordnungen durch ihre „Länge“ eindeutig festgelegt sind, wenn man von der Benennung der Elemente einmal absieht. Es ist auch klar, dass Wohlordnungen gleicher Länge dieselbe Kardinalzahl besitzen.

Aus gegebenen Wohlordnungen können auch neue wohlgeordnete Mengen entstehen. Eine einfache und dennoch bedeutende Beobachtung ist, dass eine jede (!) Teilmenge $X \subseteq M$ einer wohlgeordneten Menge $(M, <)$ zusammen mit der auf X eingeschränkten Ordnung $<_{|X}$ wohlgeordnet ist.

Beweis. Da M eine wohlgeordnete Menge ist, besitzt die Teilmenge $X \subseteq M$ ein bezüglich der Ordnung $<$ kleinstes Element. Analoges kann man auch für alle Teilmengen von X festhalten, da auch diese Mengen Teilmengen von M sind. □

4.13 Definition: Sei $(M, <)$ eine Wohlordnung und sei $x \in M$. Wir setzen

$$M_x := \{y \in M |\ y < x\}$$

und entsprechend soll $<_x$ die Restriktion der Relation auf die Menge $M_x \times M_x$ sein. $(M_x, <_x)$ heißt das durch x bestimmte **Anfangsstück von** $(M, <)$. Eine Wohlordnung $(N, <)$ heißt ein echtes Anfangsstück von $(M, <)$, wenn es ein $x \in M$ gibt mit $(N, <) = (M_x, <_x)$.

Jedes Anfangsstück von $(M, <)$ ist selbst eine Wohlordnung und stimmt bis zum Element x mit der Wohlordnung $(M, <)$ überein. Ist x dabei das kleinste Element der gesamten Wohlordnung $(M, <)$, dann ist offensichtlich $(M_x, <_x) = (\varnothing, \varnothing)$.

Wenn Wohlordnungen gleicher Länge als im Wesentlichen gleich angesehen werden, dann liegt es nahe davon ausgehend auch den Begriff „kürzer als“ für differente Wohlordnungen festzulegen.

4.14 Definition: Seien $(M, <_M)$ und $(N, <_N)$ wohlgeordnete Mengen. Dann heißt $(M, <_M)$ **kürzer als** $(N, <_N)$, falls es ein $x \in N$ existiert, so dass $(M, <_M)$ und $(N_x, <_x)$ sind gleichlang.
Wir schreiben $(M, <) \rhd (N, <)$, falls $(M, <)$ kürzer ist als $(N, <)$.

4.15 Beispiel: Betrachten wir die beiden Ordnungen (ON1) und (ON2) auf $\mathbb{N}_0$ und bezeichnen diese mit $(\mathbb{N}_0, <_1)$ bzw. $(\mathbb{N}_0, <_2)$. Das durch $x := 1$ bestimmte Anfangsstück

$$((\mathbb{N}_0)_x, (<_2)_x) = \{0 < 2 < 4 < 6 < \dots\}$$

ist gleichlang wie $(\mathbb{N}_0, <_1) = \{0 < 1 < 2 < 3 < \dots\}$, da $n \mapsto 2n$ eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen den Mengen ist.

Ordnungstreue Abbildungen übertragen die Struktur der Wohlordnung, wie das nächste Lemma aussagt.

4.16 Lemma: Ist eine Menge N gleichgeordnet wie eine wohlgeordnete Menge M, dann ist N selbst wohlgeordnet.

Beweis. Die wohlgeordnete Menge M besitzt gemäß Definition ein bezüglich der Relation $<$ kleinstes Element m_0, d.h. es gilt $m_0 < m$ für alle $m \in M$. Sei $\phi : M \to N$ die Bijektion, welche gemäß Voraussetzung existieren muss, dann gilt offenbar

$$\phi(m_0) < \phi(m) \quad \forall m \in M$$

und da ϕ bijektiv (und damit auch surjektiv) ist, werden alle Elemente aus N getroffen. Es folgt, dass N ebenfalls wohlgeordnet ist. □

Abschließend führen wir den zentralen Satz dieses Teilabschnitts auf, den von Georg Cantor entdeckten Vergleichbarkeitssatz für Wohlordnungen.

4.17 Satz (Vergleichbarkeitssatz für Wohlordnungen): Seien $(M, <)$ und $(N, <)$ zwei Wohlordnungen. Dann gilt genau eine der drei Fälle:

- $(M, <) \lhd (N, <)$
- $(M, <) \rhd (N, <)$
- $(M, <) \equiv (N, <)$

Beweis. Siehe [1], Abschnitt „Der Fundamentalsatz“. □

4.3 Eins, zwei, drei, ...

Unter einer Ordinalzahl versteht der Duden eine

> *Zahl, die die Reihenfolge kennzeichnet, die Stelle, an der etw. in einer nach bestimmten Gesichtspunkten geordneten Menge steht;* – Dudenverlag.

Mit Hilfe von Kardinalzahlen kann jede vorgegebenen Menge M einer bestimmten Äquivalenzklasse $[M]$ zugeordnet und damit deren Größe $|M|$ bestimmt werden. Ist die vorgelegte Menge endlich oder abzählbar unendlich, so ist diese Aufgabe äquivalent zum Abzählen der Mengenelemente. Dabei ist festzuhalten, dass die Ordnung von M keine

Rolle spielt. Im Gegensatz dazu benötigt man, um eine Reihen- oder Rangfolge der Elemente einer Menge zu bestimmen, sehr wohl eine Ordnungsstruktur.

Die Ähnlichkeits-Relation $\cong$ aus Definition 4.11 ist offenbar eine Äquivalenzrelation, dessen Klassen wir als **Ordnungstypus** bezeichnen werden.

Beweis. Seien $(M_i, <_i)$ mit $i = 1, 2, 3$ drei verschiedene Wohlordnungen. Zunächst zeigen wir die Reflexivität: Eine beliebige Wohlordnung $(M, <)$ ist dank der Identität offensichtlich zu sich selbst isomorph. Weiter seien

$$(M_1, <_1) \cong (M_2, <_2),$$

d.h. es gibt eine bijektive und ordnungstreue Abbildung zwischen den beiden Ordnungen – natürlich ist dann auch die Umkehrabbildung ordnungstreu und wieder bijektiv. Um die Transitivität nachzuweisen gelte

$$(M_1, <_1) \cong (M_2, <_2) \cong (M_3, <_3).$$

Das Kompositum aller drei bijektiven und ordnungstreuen Abbildungen ergibt wieder eine ordnungstreue und bijektive Abbildung, womit bereits alles gezeigt wurde. □

Im letzten Teilabschnitt haben wir zwei Elemente aus derselben Äquivalenzklasse auch als gleichlang bezeichnet bzw. festgestellt, dass eine Wohlordnung bis auf Isomorphie eindeutig durch ihre Länge bestimmt ist. Die Idee ist nun Wohlordnungen nur auf ihre Länge hin zu betrachten und die Natur des Trägers der zu Grunde liegenden Ordnung auszublenden.

4.18 Definition: Eine **Ordinalzahl** ist definiert als eine Äquivalenzklasse ähnlicher Wohlordnungen. Die zur Wohlordnung $(M, <)$ gehörige Ordinalzahl bezeichnen wir mit $\mathrm{ord}(M, <)$.

Neben dem Begriff Ordinalzahl [lat. *ordinatio* = Anordnung] ist auch *Ordnungszahl* gebräuchlich. Ordinalzahlen notieren wir häufig mit kleinen griechischen Buchstaben; so, wie es in der Literatur üblich ist. Ist $\alpha := \mathrm{ord}(M, <)$ eine Ordinalzahl, so sagen wir auch, dass $(M, <)$ den Typ α repräsentiert. Eine jede Ordinalzahl ist eine Äquivalenzklasse, d.h. wir müssen einen möglichst kanonischen Repräsentanten der Klasse bestimmten. Für endliche wohlgeordneten Mengen liegt es nahe, –wie schon bei den Kardinalzahlen– die Menge der natürlichen Zahlen als Repräsentaten, zu wählen. Wir vereinbaren also, dass eine jede endliche und wohlgeordnete Menge, die natürliche Zahl $n \in \omega$ den Ordnungstypus repräsentieren soll, d.h. vom Typ n ist. Entsprechend repräsentiert ω den Ordnungstypus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ zusammen mit der Ordnung (ON1).

Eine Menge $\{0, 1, 2, 3, \dots n\}$ und somit auch ω ist durch die Elementrelation $\in$ – gemäß Teilabschnitt 4.1 – wohlgeordnet, so gilt z.B. $0 \in 1$ oder $0, 1 \in 2$ bzw. $0, 1, 2 \in 3$. Im nächsten Beispiel sollte man diese Wohlordnung der Ordinalzahlen im Bewusstsein halten.

4.19 Beispiel:

a) Eine beliebige natürliche Zahl $n = (n-1)^+ = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ist eine Ordinalzahl, denn für ein $a \in n$ ist

$$\{x \in n |\ x < a\} = \{x \in n |\ x \in a\} = a.$$

Für die natürliche Zahl 7 und $a := 4$ gilt etwa

$$\{x \in 7 |\ x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\} = 4.$$

In Abbildung .5 haben wir den Repräsentanten der Ordinalzahl $\mathrm{ord}(4, \in)$ graphisch dargestellt.

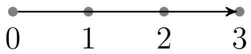

Abb. .5: *Kanonischer Repräsentant der Ordinalzahl ord*$(4, \in)$

b) Man beachte, dass die Menge $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ aller natürlicher Zahlen nicht unmittelbarer Nachfolger einer endlichen Ordinalzahl ist. Sie ist die kanonische Wahl für die Ordinalzahl unendlich abzählbarer wohlgeordneter Mengen, denn gemäß Definition ist ω die kleinste Nachfolgermenge und es gilt offensichtlich

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \in \omega.$$

Es ist also klar, dass die Bedingung aus der Definition 4.18 für die Menge ω erfüllt ist, da die Menge der natürlichen Zahlen total geordnet ist und das Lemma 4.8 gilt. Es gilt also $\mathrm{ord}(\mathbb{N}, <) = \omega$.

Die Wohlordnung $(\varnothing, \varnothing)$ repräsentiert die 0 der natürlichen Zahlen. Für jede endliche Wohlordnung $(M, <)$ sind die Repräsentanten von Kardinal- und Ordinalzahl identisch.

4.20 Definition: Seien α, β Ordinalzahlen mit $\alpha := \mathrm{ord}(M, <_M)$ und $\beta := \mathrm{ord}(N, <_N)$. Wir setzen:

$$\alpha < \beta \quad :\Leftrightarrow \quad (M, <_M) \lhd (N, <_N). \tag{.6}$$

Eine Ordinalzahl α ist also kleiner als eine andere β, wenn ein Repräsentant von α kürzer ist – im Sinne der Definition 4.14 – als ein Repräsentant von β. Da eine jede Äquivalenzklasse von Wohlordnungen nur gleichlange Vertreter enthält, ist die Definition offenbar unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $(M, <_M)$ bzw. $(N, <_N)$. Durch diese Definition wird eine Wohlordnung auf der Gesamtheit aller Wohlordnungen erklärt. Die Wohlordnung $<$ auf der Gesamtheit aller Wohlordnungen erfüllt die bemerkenswerte Eigenschaft, dass für jede Ordinalzahl α die Menge aller kleineren Ordinalzahlen eine Wohlordnung des Ordinaltyps α bildet.

4.21 Definition: Seien α eine Ordinalzahl. Wir setzen:

$$W(\alpha) := \{\beta |\ \beta \text{ ist Ordinalzahl und } \beta < \alpha\}. \tag{.7}$$

Für jedes natürliche n ist $W(n) = n$ und weiter gilt $W(\mathbb{N}) = \omega = \mathbb{N}$.

4.22 Satz (Fundamentalsatz über $W(\alpha)$): Sei α eine Ordinalzahl. Dann ist $(W(\alpha), <)$ eine Wohlordnung mit $\alpha = \operatorname{ord}(W(\alpha), <)$.

Beweis. Sei $(M, <_M)$ eine Wohlordnung des Typs α. Für $x \in M$ sei $f : M \to W(\alpha)$ erklärt durch

$$x \mapsto f(x) := \operatorname{ord}(M_x, <_M). \tag{.8}$$

Offensichtlich ist f ordnungstreu und bijektiv (folgt direkt aus den Definitionen), womit $(W(\alpha), <)$ eine Wohlordnung ist mit $\operatorname{ord}(W(\alpha), <) = \operatorname{ord}(M, <_M) = \alpha$. □

4.23 Folgerung: Sei A eine nichtleere Menge von Ordinalzahlen. Dann besitzt A, geordnet nach Größe, ein kleinstes Element.

Beweis. Sei $\alpha \in A$. Ist α bereits das kleinste Element, so sind wir fertig. Wir dürfen also annehmen, dass es mind. eine kleinere Ordinalzahl als α gibt. Sei dann $B := W(\alpha) \cap A$ und da $(W(\alpha), <)$ eine Wohlordnung ist, besitzt $B \subseteq W(\alpha)$ ein kleinstes Element, welches somit auch kleinstes Element von A ist. □

Wenn Sie mehr über Ordinalzahlen erfahren möchten, so kann ich das schöne Werk [1] von Oliver Deiser empfehlen. Dort findet man auch die von J. von Neumann gegebene „moderen Version“ der Definition einer Ordinalzahl sowie interessante historische Bemerkungen und natürlich viele weitere Sätze zu diesem Thema.

Hinweis:

Haben Sie einen Fehler oder eine Unstimmigkeit in diesem Dokument entdeckt?
Helfen Sie mit die Qualität der Manuskripte zu verbessern. Senden Sie bitte eine E-Mail an Alexander@mathematik-netz.de.

Vielen Dank!

Weiterhin viel Spaß mit der Mathematik!

http://www.mathematik-netz.de
http://www.mathering.de

Literaturverzeichnis

[1] Einführung in die Mengenlehre, Oliver Deiser, 2. Auflage, 2004, Springer Verlag.

[2] Das Buch der Beweise, Martin Aigner und Günter M. Ziegler, 2. Auflage, 2003.

[3] Recounting the rationals, N. Calkin and H. Wilf, Herbert Wilf's Home Page, 1999.

[4] Einführung in die Ordnungstheorie, Marcel Erné, 1. Auflage, 1982.