Stetigkeit in $\mathbb{R}$

Definition: (Stetigkeit)

Sei $a \in D$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ist. Sei f eine Abbildung aus Abb(D,B) mit $B \neq \emptyset$ und $B \subset \mathbb{R}$.

(i) f heißt stetig im Punkt a, wenn es zu **jeder** Umgebung V von $b := f(a) \in B$ eine Umgebung U von a gibt mit der Eigenschaft

$$f(U \cap D) \subset V \qquad \forall\ x \in U \cap D$$

gilt, also $f(x) \in V$.

(ii) f heißt **stetig**, wenn die Funktion f für alle $a \in D$ stetig ist.

In Worten:
f ist in einem Punkt a stetig, wenn es zu jeder Umgebung des Bildbereiches von f(a) eine Umgebung U des Definitionsbereiches von a gibt, so dass alle Elemente der Umgebung des Definitionsbereiches von a, in die Umgebung des Bildbereiches von f(a) abgebildet werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass man nur die Elemente der Schnittmenge der Umgebung des Definitionsbereiches mit dem D, abbilden muss.

Stetiges Verhalten einer Funktion f im Punkt a, lässt sich also als ein kontrolliertes Verhalten der Funktion in der Nähe (bzw. einer Umgebung) des Punktes a deuten. Die Funktionswerte f(x) weichen nur wenig vom Sollwert f(a) ab, wenn die Variable x nur genügend nahe bei a liegt.
Um diese Aussage vollständig nachvollziehen zu können, sollte man den Satz der lokalen Trennung und die Definition genau studieren.

Beispiel:

Die Heavisidefunktion $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Da die Stetigkeit von Natur aus eine lokale Eigenschaft ist, muss man insbesondere die „Randpunkte“ einer Funktion betrachten.

H(x) ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig. Auf den exakten Nachweis soll an dieser Stelle verzichtet werden, intuitiv ist es aber klar, da es sich um konstante Funktionen handelt.

Wir lenken unsere Aufmerksamkeit also auf den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ für $x_0 = 0$. Damit die Stetigkeit vorliegt, muss es zu jeder beliebigen Umgebung des Bildbereiches von $f(x_0)$ eine Umgebung des Definitionsbereiches um x_0 geben, so dass die Bilder der Elemente der Umgebung des Definitionsbereiches gerade eine Teilmenge von der Umgebung des Bildbereiches um $f(x_0)$ ist.

Wir wählen also für $V := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, dann ist V offensichtlich eine Umgebung von $H(0) = 1$. Wir zeigen, dass für keine Umgebung U von 0 die Beziehung $H(U) \subset V$ gelten kann:

Sei U eine Umgebung von $x_0 = 0$. Dann gibt es in U Elemente x mit $x < 0$. Für solche gilt aber $H(x) = 0$ und $0 \notin V$. Also kann $H(U) \not\subset V$ sein.

Proposition

Jede Funktion ist in den isolierten Punkten ihres Definitionsbereiches stetig.

Völlig gleichbedeutend zur Definition der Stetigkeit ist das

Satz (ε-δ-Kriterium)

Sei $a \in D$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ist. Sei f eine Abbildung aus Abb(D, $\mathbb{R}$).

f ist stetig in $a \in D \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D:$$
$$\left(|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right).$$

In Worten: Zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich ein $\delta > 0$ (i. Allgemeinen von ε und a abhängig) finden, so dass

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für jedes $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

Die Bedingung besagt einfach, dass man sich in der Definition der Stetigkeit auf ε-Umgebungen von f(x) bzw. die δ-Umgebung von a beschränken kann. Jede Umgebungen enthält schließlich eine Epsilon-Umgebung).

Das zweite Stetigkeitskriterium bringt die Stetigkeit mit der Konvergenz von Folgen in Zusammenhang.

Satz (Folgen-Kriterium)

Sei $a \in D$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ ist. Sei f eine Abbildung aus Abb(D, $\mathbb{R}$).

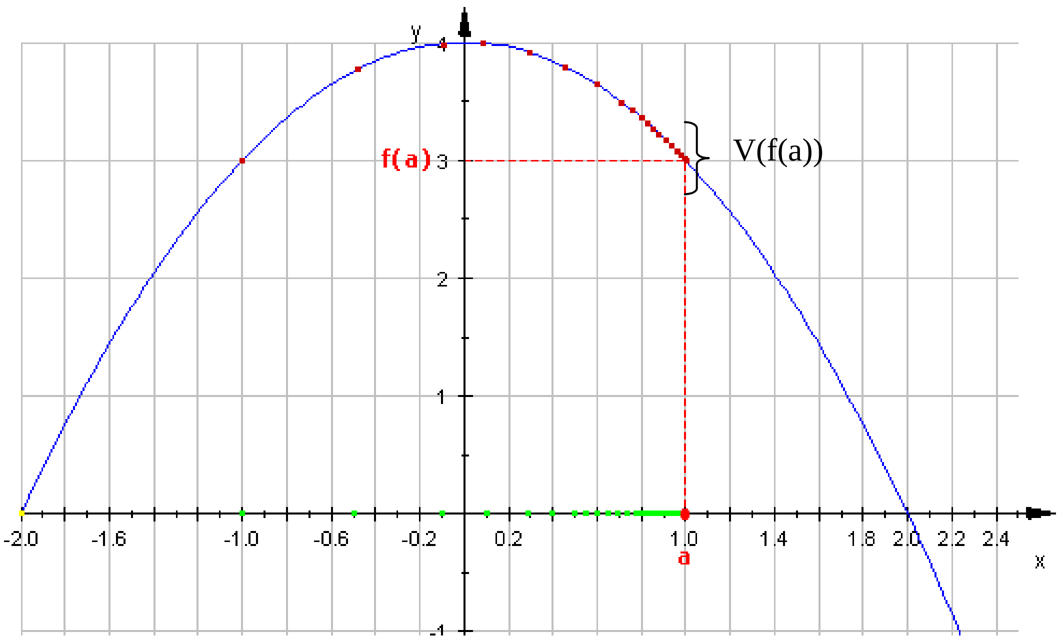
f ist stetig $\Leftrightarrow$

Für **jede** Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

Stetigkeit kann daher auch als „konvergenzerhaltend“ interpretiert werden.

Eine graphische Veranschaulichung zeigt die Idee ganz offensichtlich.



Da eine Folge (a_n) [hier grün dargestellt] gegen a konvergiert, liegen fast alle Glieder der Folge in einer beliebigen Umgebung um a.

Endlich viele Ausnahmen spielen keine Rolle bei Konvergenzfragen.

Diese Folgenwerte werden von f abgebildet auf $f((a_n))$.

Da f stetig existiert zu jeder beliebigen Umgebung V eine Umgebung U, so dass U in f(V) abgebildet wird. In U liegen fast alle Folgenglieder von (a_n), also liegen auch fast alle Folgenglieder von $f((a_n))$ in jeder beliebigen Umgebung von f(a).

Dies ist eine Beweisskizze, kein mathematisch vollständiger Beweis des Folgenkriteriums.

Das Folgen-Kriterium wird i.d.R. dazu verwendet die Unstetigkeit einer Folge in einem Punkt a nachzuweisen.

Beispiel:

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x):=x-[x]$, die Gaußklammer-Funktion. Wir untersuchen f an den kritischen Stellen $a\in\mathbb{Z}$. Dazu bilden wir den Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}[x]=a$, nach Definition der Gaußklammer-Funktion.

Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium, dass f in jedem Punkt $a\in\mathbb{Z}$ unstetig ist. Sei also $a\in\mathbb{Z}$ beliebig vorgegeben. Wir definieren eine Folge $(x_n):=a-\frac{1}{n}$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)=a$. Aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(a-\frac{1}{n}-\left[a-\frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a-\frac{1}{n}-(a-1)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}+1\right)=1\neq 0= f(a) = (a-[a]) = (a-a).$$

Mit dem Folgenkriterium ist f an den Stellen $a\in\mathbb{Z}$, daher unstetig.

Beispiel:

- Polynome und rationale Funktionen sind in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig.
- Differenzierbare Funktionen sind notwendig stetig.
- Insbesondere sind Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereichs stetig.
- sgn(x) ist in 0 unstetig, sonst stetig.
- [x] ist an der Stelle $x_0\in\mathbb{Z}$ unstetig, in allen anderen Punkten $x_0\in\mathbb{R}$ stetig. (siehe Beispiel oben)
- Die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Zahlen ist in ganz $\mathbb{R}$ unstetig.
- Konvexe Funktionen sind im Inneren ihrer Definitionsintervalle stetig.

Definition: (Häufungspunkt)
Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ein $a\in\mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** einer Teilmenge $D\subset\mathbb{R}$, wenn jede ε-Umgebung von a einen von a verschiedenen Punkt aus D enthält.

Satz (Folgen-Kriterium II)

Sei $a\in D$ ein Häufungspunkt, wobei $D\subset\mathbb{R}$ ist. Sei f eine Abbildung aus Abb(D, $\mathbb{R}$).

f ist stetig in a $\Leftrightarrow$

Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ ist.

Beispiel:

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x):=\frac{1+x}{1-x}$. Der Punkt a=1 ist offensichtlich Häufungspunkt von $\mathbb{R}$. Dann gilt mit obigem Folgen-Kriterium, dass f in a stetig ist, falls $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert und gleich f(a) ist. Da $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ für a=1 nicht existiert ist f somit in a=1 unstetig.

Dagegen kann man nachweisen, dass für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ ein Grenzwert existiert und deshalb f auf $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ stetig ist.

Satz: (Stetigkeit als lokale Eigenschaft)

Sei $a \in D \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ und $a \in W \subset \mathbb{R}$.

(i) Ist f in a stetig, so ist auch $f_{|W \cap D}$ in a stetig; insbesondere ist im Fall $W \subset D$ die Restriktion $f_{|W}$ in a stetig.

(ii) Ist $f_{|W \cap D}$ in a stetig und ist W eine Umgebung von a, so ist auch f in a stetig.

Beispiel:

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{1}{x}$ stetig auf $D := [0, \infty[$.

Sei $W := [-10, 1]$, dann ist $f_{|W \cap D} = f_{|[0,1]}$ stetig als Restriktion einer rationalen Funktion.

Sei $W := [0,10]$, dann ist $W \subset D$ und deshalb ist $f_{|W \cap D}$ stetig auf ganz W, es gilt also $f_{|W}$ ist stetig.

Stetige Fortsetzung

Wir haben gesehen, dass die Restriktion von stetigen Funktionen wieder stetig ist. Wir wollen nun die Fragestellung umkehren: Sind $f \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$ gegeben, so stellt sich die Frage, ob sich f an der Stelle a so definieren (oder abändern) lässt, dass Stetigkeit in a erzielt wird.
Genauer lässt sich die Frage so formulieren:

Gibt es zu $f \in \mathrm{Abb}(D, \mathbb{R})$ *und* $a \in \mathbb{R}$ *eine Funktion* $F: D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F(x) = f(x) \quad \textit{für jedes } x \in D\setminus\{a\},$$

die in a stetig ist?

Eine ziemlich einfache Antwort lässt sich geben, wenn a kein Häufungspunkt von D ist. Die Antwort ist dann „ja“. Genauer:

Ist a *kein Häufungspunkt von* D, *so ist jede Funktion* $F: D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ *in* a *stetig*.

Wenn a kein Häufungspunkt von D ist, folgt, dass es eine Umgebung U von a gibt, die entweder keinen Punkt von D enthält (im Fall $a \notin D$) oder nur a selbst (Fall $a \in D$).
Es gilt also für $U \cap D = \emptyset$ oder $U \cap D = \{a\}$.
Ist also irgendeine Umgebung V von F(a) gegeben, so gilt für solch ein U mit $U \cap D \subset \{a\}$ die Beziehung

$$F(U \cap D) \subset \{ F(a) \} \subset V;$$

Daraus folgt die Stetigkeit von F in a.

Beispiel:

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$ mit $D := [1,2]$ und sei $a = 0 \in \mathbb{R}$, dann gibt es eine stetige Fortsetzung $F: D \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$ und F ist stetig, da jede Funktion in ihren isolierten Punkten ihres Definitionsbereiches stetig ist. Es gilt $f(x) = F(x)$ für alle $x \in D\setminus\{0\}$.

Interessant wird die anfangs gestellte Frage also erst, wenn a ein Häufungspunkt von D ist. Diesen Fall untersuchen wir weiter.

Definition: (Stetige Fortsetzung)
Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f \in \text{Abb}(D, \mathbb{R})$. Ist a ein Häufungspunkt von D, so gibt es höchstens eine in a stetige Funktion $F: D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(x) \text{ für jedes } x \in D \setminus \{a\}.$$

Falls existent, heißt F die stetige Fortsetzung von f in a.

Äquivalent zur Existenz einer stetigen Fortsetzung ist folgender Satz:

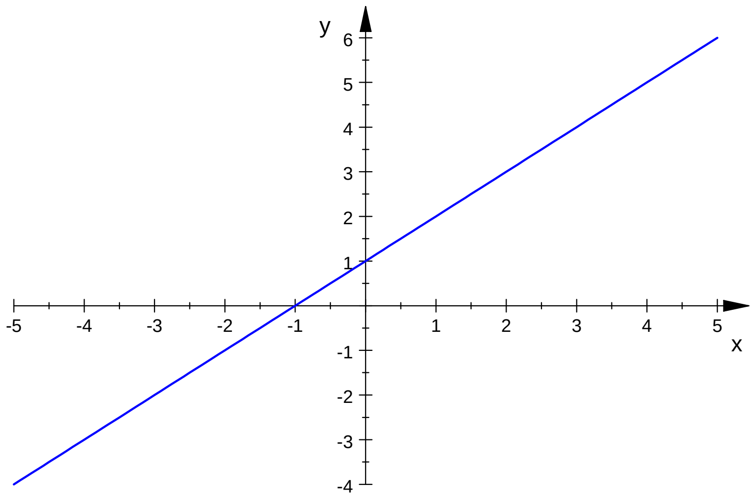
Satz: (Stetige Fortsetzung)

Ist a ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$, so heißt $f: D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ in a stetig ergänzbar oder fortsetzbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert.

Eine Unstetigkeitsstelle a von f ist hebbar, wenn der Funktionswert f(a) so abgeändert werden kann, dass f in a stetig wird.

Beispiel:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1$.



Man sieht, dass im kritischen Punkt a=1, nur eine Lücke jedoch keine Polstelle existiert.

Deshalb ist die Funktion auch stetig fortsetzbar. Bei Polstellen (auch Sprungstelle genannt) dagegen, d.h. wenn links- und rechtsseitiger GW different sind, existiert keine stetige Fortsetzung.

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen stetigen Funktionen f in a, a ist Häufungspunkt, und der Existenz des Grenzwertes von f in a, wie obiger Satz zeigt.

Eine stetige Funktion f kann also in einem beliebigen Punkt a mit Hilfe konstanter Funktionen beliebig genau approximiert werden. Es gilt ja

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0.$$

Ausblick:
Die Differenzierbarkeit dagegen ist die Eigenschaft eine Funktion f in a mit Hilfe einer affinen Funktion zu approximieren. Führt man diese Reihe fort, so stößt man unweigerlich auf die so genannten Taylorreihen – mit deren Hilfe kann man Funktionen durch Polynome approximieren.